PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 2. 15. Januar 1914. 15. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 3 am 17. Januar 1914.

INHALT:

Originalmitteilungen:

K. Fredenhagen, Das Ausbleiben des lichtelektrischen Effektes frisch geschabter Metalloberflächen bei völligem Ausschluß reaktionsfähiger Gase. S. 65.

H. Küstner, Das Ausbleiben des lichtelektrischen Effektes frisch geschabter Zinkoberflächen bei völligem Ausschluß reaktionsfähiger Gase. S. 68.

M. v. Laue u. J. St. van der Lingen, Experimentelle Untersuchungen über den Debyeeffekt. S. 75.

W. L. Bragg, Eine Bemerkung über die Interferenzfiguren hemiedrischer Kristalle. S. 77.

E. Schrödinger, Über die Schärfe der mit Röntgenstrahlen erzeugten Interferenzbilder. S. 79.

W. H. Keesom, Über die Magnetisierung von ferromagnetischen Körpern in Beziehung zur Annahme einer Nullpunktsenergie. II. S. 86.

K. Kilchling, Beitrag zur Theorie und Berechnung der optischen Elektronen und Ionen. S. 88.

A. D. Fokker, Über Brownsche Bewegungen im Strahlungsfeld. S. 96.

H. Kohn, Über die Temperatur inhomogener Flammen. S. 98.

A. Weißenberger, Über die Thermokräfte von Leitern mit kleiner Elektronenzahl. S. 105.

A. Einstein, Nachträgliche Antwort auf eine Frage von Herrn Reißner. S. 108.

Besprechungen:

P. Zeeman, Researches in magneto-optics. S. 111.

L. Prandtl, Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung. S. 111.

A. Guillet, Propriétés cinématiques fondamentales des vibrations. S. 112.

Personalien. S. 112.

Angebote. S. 112.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Das Ausbleiben des lichtelektrischen Effektes frisch geschabter Metalloberflächen bei völligem Ausschluß reaktionsfähiger Gase.

Von K. Fredenhagen.

Bei meinen Versuchen über die Abgabe negativer Elektronen von erhitzten Metallen fand ich, daß hierbei Reaktionseffekte eine wesentliche Rolle spielen, und ich stellte ferner fest, daß sich die Elektronenemission einer in einem abgeschlossenen Rohre erhitzten Kaliummenge auch noch nach tagelanger Versuchsdauer änderte. Zum Schlusse dieser Arbeit sprach ich die Vermutung aus, daß lichtelektrische Versuche unter ähnlichen Versuchsbedingungen Aufklärung über die Ursache des lichtelektrischen Effekts geben würden und stellte derartige Versuche in Aussicht[1]). Wie aus dem Zusammenhang hervorgeht, hatte ich hierbei den Gedanken, daß beim normalen lichtelektrischen Effekt, ebenso wie ich es für die sogenannte thermische Elektronenemission der Metalle und des Kalziumoxyds[2]) nachweisen konnte, Ursachen chemischer Art die ausschlaggebende Rolle spielen könnten. Bei den damaligen Versuchen selbst, die des lichtelektrischen Effektes wegen immer im Dunkeln ausgeführt werden mußten, fand ich, daß mit der Abnahme des Dunkeleffektes auch die lichtelektrische Wirksamkeit geringer zu werden schien. Doch ließen die Versuche wegen der hierfür ungünstigen Versuchsbedingungen keine exakten Schlüsse zu.

Inzwischen sind nun ähnliche Gedanken auch von anderen Autoren ausgesprochen worden. H. Greinacher weist zum Schlusse seiner Arbeit „Über den Einfluß der Glimmentladung auf den lichtelektrischen Effekt[1])" darauf hin, daß nach seinen Untersuchungen der Voltaeffekt und nach den von mir ausgeführten die Elektronenemission erhitzter Metalle und Oxyde auf chemische Reaktionen zurückgeführt werden müßte und sagt dann, daß die von ihm in der genannten Arbeit beschriebenen Versuche über den lichtelektrischen Effekt es vermuten lassen, daß man die Erklärungsweise auch hier in derselben Richtung suchen müsse. Ferner heißt es in der Arbeit von Pohl und Pringsheim „Über die lichtelektrische Elektronenemission[2])": „Manchmal will es uns so scheinen, als handle es sich bei dem ganzen normalen Effekt überhaupt um einen sekundären Vorgang, als entstamme die Energie der Elektronen dem Lichte nicht direkt, sondern auf dem Umwege über irgendeinen, vielleicht halbchemischen Prozeß in der gasbeladenen Oberflächenschicht des Metalls. Sicher ist wenigstens, daß für die Alkalimetalle chemische Vorgänge die Ausbeute an Elektronen im normalen Photoeffekt wesentlich erhöhen."

Ich glaube nun, daß die hier diskutierte Frage, wenn auch noch nicht allgemein, so doch

1) Verh. d. D. phys. Ges. **14**, 384, 1912.
2) Leipziger Ber., math.-phys. Kl. **66**, 42, 1913.

1) Verh. d. D. phys. Ges. **15**, 797, 1913.
2) Diese Zeitschr. **14**, 1112, 1913.

für das lichtelektrische Verhalten des Zinks durch Versuche, über die Herr Küstner in der nachfolgenden Arbeit berichten wird, eindeutig zugunsten der Mitwirkung einer chemischen Ursache entschieden ist. Als Einführung zu der Beschreibung dieser Versuche möchte ich in großen Zügen die Gesichtspunkte zusammenstellen, welche mich bei der Inangriffnahme der Frage leiteten.

Wenn man von dem Gesichtspunkte ausgeht, daß chemische Reaktionen bei dem lichtelektrischen Effekt eine Rolle spielen, so ist die einfachste Annahme, die man machen kann — auf die ich mich jedoch nicht festlegen möchte, und über deren Berechtigung Versuche entscheiden werden, mit denen ich beschäftigt bin — die, daß mit der Absorption des auffallenden Lichtes ein photochemischer Prozeß verbunden ist, und daß proportional dem erfolgenden chemischen Umsatz Elektronen emittiert werden, wie man es ja nach den Versuchen von Haber und Just annehmen kann[1]). Als photochemischer Prozeß kommt hierbei wohl in erster Linie die Reaktion des Metalles mit Sauerstoff oder Wasserdampf in Frage. Bevor jedoch Versuche nach dieser Richtung in Angriff genommen wurden, habe ich zunächst nachgesehen, ob nach den Ergebnissen der zahlreichen Arbeiten über den lichtelektrischen Effekt ein derartiger Gesichtspunkt überhaupt Aussicht auf Erfolg bieten konnte. Dies ist aber, wie wir im folgenden sehen werden, durchaus der Fall.

Daß Gase bei dem lichtelektrischen Effekt eine große Rolle spielen, ist eine allgemein anerkannte Tatsache; ich möchte nach dieser Richtung auf die Äußerung von Herrn Hallwachs, dem Entdecker des lichtelektrischen Effekts, gelegentlich der sich an den Vortrag des Herrn Pohl auf der Wiener Naturforscherversammlung anknüpfenden Diskussion verweisen[2]). Die Art, in der die Gase wirken, wird von den verschiedenen Autoren verschieden, abgesehen von den in der Einleitung erwähnten Stellen jedoch wohl ausschließlich in physikalischem Sinne gedeutet. Man denkt daran, daß die Gase den Effekt stören, daß sie ihn herabsetzen, nicht aber, daß sie ihn ursächlich hervorrufen.

Da nach einer Reaktionstheorie des lichtelektrischen Effekts fortgesetzt Gase verbraucht werden, war weiter zu prüfen, ob reaktionsfähige Gase überhaupt in so großer Konzentration vorhanden sind, daß die auftretenden Ströme in dem chemischen Umsatz ihre Ursache haben können. Nehmen wir an, daß pro Quadratzentimeter der Oberfläche des Metalls ein Strom von $1 \cdot 10^{-10}$ Amp. abgegeben wird, so würden etwa 4000 Jahre erforderlich sein, damit 1 mg Sauerstoff umgesetzt wäre. Der notwendige chemische Umsatz ist also außerordentlich klein, und da man bei den bisherigen lichtelektrischen Versuchen in der Regel weder im extremsten Vakuum noch mit Vermeidung aller Schliffe gearbeitet hat, so besteht wohl kein Zweifel, daß unter derartigen Versuchsbedingungen reaktionsfähige Gase in völlig ausreichender Menge vorhanden sind.

Die lichtelektrischen Ermüdungskurven, wie sie in letzter Zeit sehr schön von Hermann[1]) aufgenommen wurden, sind bekannt. Stellt man in einem Vakuum von etwa $1 \cdot 10^{-4}$ mm durch Schaben eine reine Oberfläche her und belichtet sofort nach dem Aufhören des Schabens, so hat man anfangs einen relativ großen Effekt, der im Laufe weniger Minuten auf einen um das Mehrfache geringeren Wert abfällt. Nach der bisher angenommenen Theorie kommt dieser „Ermüdung" genannte Abfall des Effekts dadurch zustande, daß man zu Beginn des Versuchs das reine Metall hat, das einen großen Effekt gibt, und daß im Laufe der Zeit die Oberfläche des Metalls durch Adsorption von Gasen und eventuell durch eintretende chemische Reaktionen so verändert wird, daß das Licht im Laufe der Zeit immer weniger auf reines Metall trifft, und daß die vom Licht ausgelösten Elektronen durch diese Oberflächenschichten zurückgehalten werden.

Diesen Abfall des lichtelektrischen Effekts können wir aber auch sehr gut im Sinne einer Reaktionstheorie deuten. Da, wie vorhin dargelegt, die bisher ausgeführten Versuche unter Bedingungen angestellt wurden, in denen reaktionsfähige Gase nicht hinreichend entfernt waren, so wird sofort nach Aufhören des Schabens, wenn man die reine Metalloberfläche hat, ein relativ großer chemischer Umsatz erfolgen, der mit einer relativ großen Emission von Elektronen verbunden ist. Durch diesen chemischen Umsatz wird sich aber auf der Metalloberfläche eine mit der Zeit an Stärke zunehmende, anfangs außerordentlich dünne Schicht ausbilden, welche das Metall mit zunehmender Dicke mehr und mehr vor dem chemischen Angriff schützt. Infolgedessen muß im Laufe der Zeit eine Verminderung der Elektronenemission stattfinden. Aus den aufgenommenen Kurven über den Abfall des lichtelektrischen Effekts geht entsprechend auch hervor, daß zu Anfang ein relativ schneller und später ein sehr langsamer Abfall des Effekts erfolgt. Es scheint mir, daß man zur Erklärung des späteren, sehr langsamen Abfalls auch daran denken muß, daß nach der Bildung der ersten schützenden Schicht

1) Ann. d. Phys. **36**, 308, 1911.
2) Diese Zeitschr. **14**, 1114, 1913.

1) Verh. d. D. phys. Ges. **14**, 557, 1912.

weitere Reaktionen erst erfolgen können, nachdem Gase durch diese hindurchdiffundiert sind.

Soweit ich sehe, sind also alle bekannten Tatsachen derart, daß sie die Annahme einer Reaktionstheorie zulassen. Es handelt sich also weiter darum, Versuche zu finden, welche imstande sind, zwischen beiden Theorien eine Entscheidung zu liefern. Der augenfälligste Unterschied zwischen beiden Theorien liegt darin, daß nach der alten Auffassung der lichtelektrische Effekt an der frisch geschabten Oberfläche eines Metalls in einem von reaktionsfähigen Gasen völlig befreiten Vakuum seinen maximalen Wert haben und behalten muß, während nach der Reaktionstheorie unter diesen Bedingungen überhaupt kein lichtelektrischer Effekt auftreten darf. Um einen entscheidenden Versuch ausführen zu können, war es notwendig, ein Vakuum herzustellen, in dem reaktionsfähige Gase außerordentlich viel weitgehender entfernt waren, als es bei den früheren Versuchen der Fall war, und eine Vorrichtung zu konstruieren, mit Hilfe deren dem Metall in diesem Vakuum jederzeit eine frische Oberfläche gegeben werden konnte.

Was zunächst den Schaber anbetrifft, so zeigte mir ein Vorversuch, daß es möglich war, einen völlig in Glas eingeschmolzenen, elektromagnetisch betätigten, hinreichend wirksamen Schaber zu konstruieren, und Herr Küstner, der die weiteren Untersuchungen mit großer experimenteller Geschicklichkeit durchgeführt hat, hat diesen Schaber so verbessert, daß es möglich ist, mit demselben in wenigen Minuten Tausende von Schabungen auszuführen und zwar so intensiv, daß man die abgeschabten Metallflitterchen deutlich sehen kann.

Die weitere Bedingung war ein außerordentlich weitgehender Ausschluß aller reaktionsfähigen Gase. Daß man bei Verwendung von gefetteten Hähnen und Schliffen nicht zu einem hinreichenden Vakuum gelangen kann, ist bekannt. Alle Dichtungen wurden daher mit Siegellack ausgeführt und bei den aufgekitteten Quarzplatten außerdem die Vorsicht angewandt, daß über der ersten üblichen Platte mit Hilfe eines Schliffes noch eine zweite Quarzplatte gesetzt und der Raum zwischen ihnen durch eine Luftpumpe evakuiert war. Über die Bedingungen, wie die Apparatur weiter zu gestalten war, geben meine Versuche über die Elektronenemission des erhitzten Kaliums die nötigen Richtlinien. Wurde ein Kaliumrohr an einer gut wirkenden Gaedepumpe evakuiert, bis das Vakuum ungefähr auf $1 \cdot 10^{-5}$ mm gesunken war, so erhielt ich z. B. bei einer Temperatur von 300° C und einer angelegten Spannung von ungefähr 100 Volt schwankende Ausschläge in der Größenordnung von etwa 20000 Skalenteilen. Solange der Apparat an der Pumpe blieb, war es trotz tagelanger Versuchsdauer nicht möglich, die Ausschläge konstant zu erhalten oder weitgehend zu verringern. Wurde der Apparat von der Pumpe abgeschmolzen, so wurden die Ausschläge merklich konstant und zugleich allmählich kleiner und kleiner, bis schließlich nach sehr langen Versuchsdauern sogar bei einer um 50° höheren Temperatur kaum noch meßbare Ausschläge übrigblieben[1]). Durch Versuche, welche ich demnächst veröffentlichen werde, fand ich weiter, daß die Herabsetzung des Effekts durch Glimmentladungen außerordentlich befördert wird, weil hierdurch einerseits die Entgasung der Glaswandungen und Metallteile und andererseits der Eintritt chemischer Reaktionen begünstigt wird. Aus diesen Versuchen folgt, daß das beste an einer Pumpe erreichbare Vakuum nicht ausreichend ist, um die reagierenden Gase hinreichend zu entfernen. Es wurde deshalb beschlossen, den Apparat von der Pumpe abzuschmelzen und mit einem Nebenrohr zu versehen, in dem metallisches Kalium destilliert und den Einwirkungen von Induktorentladungen ausgesetzt werden konnte.

Über die mit einem derartigen Apparat vorgenommenen Versuche über die lichtelektrischen Eigenschaften des Zinks wird Herr Küstner, wie schon erwähnt, in der nachfolgenden Arbeit berichten. Ich möchte hier nur erwähnen, daß es gelungen ist, auf diese Weise den lichtelektrischen Effekt des Zinks auf eine nicht mehr meßbare Größe, d. h. auf den weniger als tausendsten Teil des Betrages herabzudrücken, den der Effekt unter gewöhnlichen Versuchsbedingungen hat. Es sei auch bemerkt, daß es möglich gewesen ist, die vorhandenen Effekte im stetigen Übergange allmählich zu verringern und in den gleichen Versuchsrohren durch Zutritt von Gasen wiederum bis auf die ursprünglichen Werte zu vergrößern. Hierbei trat auch der Fall ein, daß die Konzentration der reaktionsfähigen Gase an der Metalloberfläche kleiner war, als dem Gleichgewicht mit dem Gasraum oder der Gashaut anderer nicht so weit entgaster Metallteile entsprach. Alsdann mußte der Effekt nicht wie bei den Ermüdungserscheinungen abnehmen, sondern im Gegenteil im Laufe der Zeit ansteigen.

Diese Resultate wurden bisher nur am Zink gewonnen. Weiteren Versuchen, mit denen wir beschäftigt sind, wird es vorbehalten sein, zu entscheiden, ob sich andere Metalle in gleicher Weise verhalten. Ich möchte hinzufügen, daß es mir nach neueren Versuchen über die Elek-

1) Verh. d. D. phys. Ges. 14. 384. 1912.

tronenemission der Alkalimetalle, über die ich in kurzer Zeit berichten werde, sehr wohl möglich erscheint, daß besonders bei den Alkalimetallen auch noch andere Ursachen für den lichtelektrischen Effekt in Frage kommen. Wir sind gleichzeitig mit Versuchen beschäftigt, welche entscheiden sollen, ob es sich beim lichtelektrischen Effekt um photochemische Prozesse oder um auslösende Wirkungen des Lichts handelt.

Leipzig, Theoretisch-physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 12. Dezember 1913.)

Das Ausbleiben des lichtelektrischen Effektes frisch geschabter Zinkoberflächen bei völligem Ausschluß reaktionsfähiger Gase.

Von Hans Küstner.

Im Voraufgegangenen hat Herr Fredenhagen eine Theorie entwickelt, nach der das Zustandekommen eines lichtelektrischen Stromes in ursächlichem Zusammenhang mit dem Vorhandensein von reaktionsfähigen Gasen steht. Nach dieser Theorie wird der lichtelektrische Strom durch Reaktionen hervorgerufen, die sich, unter dem Einflusse des Lichtes, zwischen dem belichteten Metall und dem dieses umgebenden Gase vollziehen.

Nach dieser Theorie müssen folgende Fälle unterschieden werden:

1. In einem Vakuum, das völlig frei von reagierenden Gasen ist, kann zwischen einer Metalloberfläche, die durch Schaben in diesem Vakuum von Verunreinigungen jeder Art befreit worden ist, und ihrer Umgebung kein chemischer Umsatz stattfinden, es kann daher kein lichtelektrischer Strom entstehen.

In graphischer Darstellung, bei der die Zeit als Abszisse, der Strom als Ordinate aufgetragen wird, fällt hier das Diagramm des lichtelektrischen Stromes mit der Zeitachse zusammen. (Kurve 1 der Fig. 1.)

2. Es möge eine Metalloberfläche in einem von reaktionsfähigen Gasen nicht befreiten Vakuum durch Schaben von Verunreinigungen jeder Art befreit werden. Da sich die Gasadsorption in sehr kurzer Zeit vollzieht, so wird in dem kurzen Zeitraum zwischen letzter Schabung und Belichtungsbeginn eine verhältnismäßig kräftige Adsorption reaktionsfähiger Gase an der Metalloberfläche eingetreten sein. Unter dem Einflusse der Belichtung wird zwischen diesen und der Metalloberfläche eine starke Reaktion und daher eine kräftige Abgabe von Elektronen erfolgen, es wird also ein lichtelektrischer Strom entstehen. Durch diesen chemischen Umsatz bildet sich aber eine mit der Zeit an Stärke zunehmende Schicht aus, die das Metall mit zunehmender Dicke mehr und mehr vor dem chemischen Angriff und der Einwirkung des Lichtes schützt. Gleichzeitig findet eine Verminderung der Elektronenemission statt. Je dicker diese Schicht wird, desto längere Zeit wird das reaktionsfähige Gas brauchen, um durch sie hindurch zu diffundieren. Hierdurch wird der Abfall des Effekts noch mehr verlangsamt werden. (Ermüdung.)

In graphischer Darstellung entspricht das einer Kurve, die zuerst schnell, später langsamer gegen die Zeitachse konvergiert. (Kurve 2 der Fig. 1.)

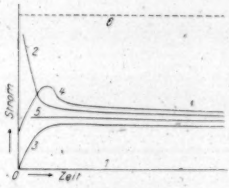


Fig. 1.

3. Befinden sich in unmittelbarer Nähe einer durch Schaben im Vakuum von Verunreinigungen jeder Art befreiten Metalloberfläche keine reaktionsfähigen Gase, wohl aber in einiger Entfernung von derselben, z. B. adsorbiert an anderen Metallteilen, so wird eine Diffusion der Gase nach dem Metall hin stattfinden. Entsprechend der an der Metalloberfläche herrschenden Konzentration reaktionsfähiger Gase wird die Stärke der Reaktion und mit ihr die Stärke des lichtelektrischen Stromes sein. Diese Diffusion der reaktionsfähigen Gase wird so lange dauern, bis ein Zustand des Gleichgewichts herrscht. Mit fortschreitender Reaktion wird aber wiederum eine Schichtbildung auftreten, die dem Zustandekommen einer Reaktion entgegenwirkt. Schließlich wird daher der lichtelektrische Strom — wie im zweiten Falle — ganz langsam abnehmen. (Erholung und anschließende langsame Ermüdung.)

In graphischer Darstellung entspricht das einer Kurve, die zuerst von Null ansteigt, dann ein Maximum erreicht und gegen die Zeitachse konvergiert. (Kurve 3 der Fig. 1.)

4. Befindet sich eine durch Schaben von Verunreinigungen befreite Metalloberfläche in einem Vakuum, das bei Belichtungsbeginn in der Nähe der Metalloberfläche bereits reaktionsfähige Gase von geringer Konzentration besitzt, während sich in einiger Entfernung solche von stärkerer Konzentration befinden, so wird bei

Belichtungsbeginn bereits eine Umsetzung an der Metalloberfläche und mit ihr ein lichtelektrischer Strom auftreten. Je nach der Stärke der Anfangskonzentration an der Metalloberfläche, und je nach der Geschwindigkeit, mit der sich die Diffusion der reaktionsfähigen Gase und die Ausbildung der Schicht vollzieht, ist es nun möglich, daß zunächst ein Ansteigen des Stromes erfolgt, dem sich ein Abfallen desselben anschließt, oder auch, daß die beiden einander entgegenwirkenden Vorgänge einander gerade soweit aufheben, daß weder ein Ansteigen noch ein Sinken des Stromes auftritt, sondern dieser konstant bleibt, bis die Schichtbildung ein allmähliches Sinken bewirkt.

In graphischer Darstellung entspricht die erste Annahme einer Kurve, die, von einem endlichen Werte ansteigend, ein Maximum erreicht, dann steil abfällt und schließlich allmählich gegen die Zeitachse konvergiert, die letzte Annahme einer Kurve, die zunächst parallel zur Zeitachse verläuft und in ihrem weiteren Verlaufe gegen diese konvergiert. (Kurven 4 und 5 der Fig. 1.)

In scharfem Gegensatze hierzu steht die alte Theorie, die einen ursächlichen Zusammenhang mit chemischen Umsetzungen leugnet und dem reinen Metall die Eigenschaft zuschreibt, unter dem Einflusse des Lichtes Elektronen auszusenden. Deshalb muß ein Metall, dessen Umgebung dauernd frei von reaktionsfähigen Gasen ist, einen konstanten lichtelektrischen Strom von maximaler Größe aussenden. In graphischer Darstellung entspricht das einer Parallelen zur Zeitachse. (Kurve 6 der Fig. 1.) Sind dagegen reaktionsfähige Gase anwesend, so tritt durch chemische Umsätze an der Oberfläche Schichtbildung auf, die die reine Oberfläche zerstört und, auf das Licht abhaltend, auf die Elektronen hemmend wirkend, Ermüdung hervorruft.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war es, nach möglichst vollkommener Entfernung aller reaktionsfähigen Gase aus der Versuchsanordnung zu untersuchen, ob der lichtelektrische Strom den Wert Null oder einen konstanten, maximalen Wert annehmen würde und so auf experimenteller Grundlage eine Entscheidung zugunsten der einen oder der anderen Theorie herbeizuführen.

Die Untersuchungen wurden an Zink ausgeführt. Die aufgezählten Kurventypen wurden in ausgeprägter Weise erhalten.

Versuche an anderen Metallen sind im Gange.

Die Versuchsanordnung.

Ein etwa 4 cm weites Glasrohr G (Fig. 2) trägt an seinem oberen Ende einen Schliff, auf den eine Quarzplatte Q von etwa 1,7 mm Dicke

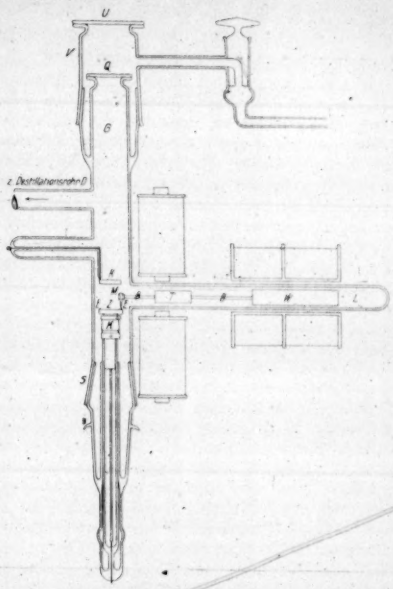


Fig. 2.

aufgesiegelt ist. Dieses Rohrende wird umschlossen durch ein Glasrohr V, das an seinem oberen Ende gleichfalls durch eine aufgesiegelte Quarzplatte U abgeschlossen ist; das Glasrohr V kann evakuiert werden, und durch dieses Vorvakuum wird die Anordnung vor Eindringen von Luft geschützt, falls die Dichtung der Quarzplatte Q den Druck einer Atmosphäre nicht abzuhalten imstande ist. Das untere Ende des Rohres G mündet in den Schliff S; sein Gegenschliff trägt in einer Messingklammer K die Zinkplatte Z. Der Durchmesser der Zinkplatte ist größer als der der Messingklammer, daher liegt diese im Schatten der Zinkplatte, sobald ultraviolette Strahlen durch die Quarzfenster auf das Zink fallen. Das Zink ist chemisch rein, im Vakuum destilliert und auf der Drehbank bearbeitet. Als andere Elektrode dient ein Ring aus Platinblech R, der in einigen Zentimetern Höhe über der Zinkplatte gehalten wird. Seitlich der Zinkplatte Z befindet sich ein Glasrohr L, das die Vakuumschabvorrichtung aufnimmt.

Es wurden zwei verschiedene Schabvorrichtungen benutzt. Im Prinzip waren beide gleich; doch wies die zweite einige Verbesserungen gegen die erste auf. Die Schabvorrichtung, mit der die ersten der in dieser Arbeit mitgeteilten Ver-

suche ausgeführt wurden, war folgendermaßen beschaffen:

Ein Stahlmesserchen M (Fig. 2), dessen geradlinige Schneide auf der Zinkplatte Z ruht, hat einen horizontalen Stiel B aus Messing. Dieser trägt zwei Eisenkerne: einen etwa 3 cm langen, T, dicht am Messerchen, und einen Hohleisenkern W von etwa 8 cm Länge in 12 cm Entfernung davon. Um das Glasrohr L, das das ganze System aufnimmt, sind von außen zwei Magnetspulen geschoben, die ihn umschließen, und wechselweise mit Strom beschickt werden können. Dadurch wird ein Hin- und Hergleiten des Messerchens auf dem Zink bewirkt. Vor dem Herunterrutschen von der Zinkplatte wird das Messerchen durch zwei Eisenstifte E geschützt, die in das Zink eingeschraubt sind. Unter und über dem dem Messerchen benachbarten Eisenkern T steht außerhalb des Glasrohres je ein Elektromagnet mit Eisenkern. Der untere dient dazu, den Schaber kräftiger auf das Zink zu ziehen und dadurch die Schabwirkung zu verstärken; mit Hilfe des oberen kann der ganze Schaber vom Zink weggehoben werden. Dies war deshalb erforderlich, weil sonst die durch Reibung zwischen Glasrohr L und äußerem Eisenkern W erzeugte Reibungselektrizität ihren Weg durch den Schaber, das Zink und die Meßeinrichtung zur Erde nahm und sich so störend geltend machte.

Nachdem durch das Anschlagen des Eisenkerns an die Glaswand beim Heben des Schabers das erste Rohr zerstört worden war, wurde ein neuer Schaber konstruiert, der zur Hebung keines Elektromagneten bedurfte, sondern dies selbsttätig besorgte. Dadurch wurden Stöße gegen die Glaswand vermieden. Auch glitt er auf einem Messingrohr, das geerdet werden konnte. Dadurch wurde jede Störung von Reibungselektrizität völlig beseitigt. Durch eine Führung, die ein Herabgleiten des Messerchens vom Zink verhinderte, wurden die ins Zink geschraubten Eisenstiftchen E unnötig. Eine eingehende Schilderung dieses Schabers würde jedoch über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen. Nur so viel soll über die Kraft des Schabers gesagt werden, daß sich in den seitlichen Ansatzrohren des Versuchsrohres Haufen von Zinkstaub vorfanden, die durch den Schaber dorthin geschleudert worden waren, und daß nach Beendigung der Versuche das Zink an den Stellen, an denen es geschabt war, eine deutlich sichtbare Vertiefung zeigte.

Betätigt wurde der Schaber zuerst durch eine Wippe, die die beiden Elektromagnete wechselweise mit Strom beschickte; hierbei konnte jede einzelne Schabung gezählt werden. Im folgenden wird unter einer Schabung ein einmaliges Gleiten des Schabers über das Zink verstanden werden. Später wurden die beiden Spulen durch einen Motorunterbrecher wechselweise betrieben; hier kann im folgenden nur die Zeit, während der geschabt wurde, angegeben werden.

Das Destillationsrohr D (Fig. 3), das zur Absorption der reaktionsfähigen Gase durch erhitztes Kalium unter dem Einfluß von Glimmentladungen dient, ist an das soeben beschriebene Versuchsrohr G angeschmolzen. Es besitzt die abgebildete Form. Nachdem das Kalium

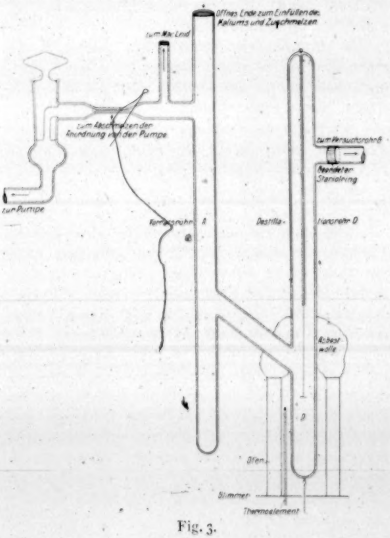


Fig. 3.

nach einer von Herrn Fredenhagen bereits früher ausführlich geschilderten Methode behandelt worden war[1]), wurde es in das Vorratsrohr A gebracht. War dieses oben zugeschmolzen, so konnte das Kalium durch einen elektrischen Ofen in das Destillationsrohr hinüberdestilliert werden. An einer zwischen Vorratsrohr und Pumpe vorgesehenen Abschmelzstelle konnte die Anordnung von der Pumpe getrennt werden. Das Mac Leod blieb auch nach dem Abschmelzen mit der Anordnung verbunden. Vor der Gaede-Quecksilberpumpe und dem Mac Leod saßen Kühlschlangen, die ständig in flüssige Luft tauchten, wodurch Quecksilberdämpfe ferngehalten wurden.

1) Fredenhagen, diese Zeitschr. **12**, 398, 1911.

Die Abbildungen stellen die ganze Anordnung der Übersicht halber in einer Ebene dar, was in Wirklichkeit nicht der Fall war.

Meßanordnung.

Zur Messung diente ein Quadrantenelektrometer mit Quarzfaden, dessen Nadel auf ein Potential von 200 Volt aufgeladen wurde. Die Empfindlichkeit des Elektrometers betrug alsdann $2{,}01 \cdot 10^{-3}$ Volt pro Skalenteil. Um Ströme messen zu können, wurden auswechselbare Widerstände von außerordentlich guter Konstanz verwendet. Diese waren selbst verfertigt. Eine Probemessung ergab innerhalb eines Zeitraumes von 12 Tagen eine Änderung von weniger als 3 Proz. Die fast stets gebrauchte Empfindlichkeit, auf die auch alle anderen reduziert sind, betrug $3{,}64 \cdot 10^{-11}$ Ampère.

Die Schaltung ist aus der Fig. 4 ersichtlich. Das eine Quadrantenpaar war ständig geerdet,

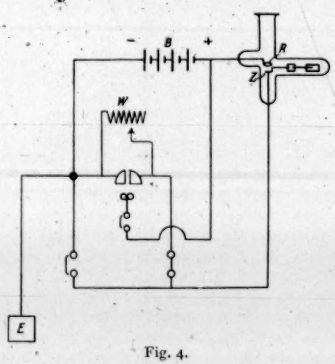


Fig. 4.

ebenso der negative Pol der Hochspannungsbatterie B. Diese bestand aus hundert kleinen Akkumulatoren. Ihr positiver Pol lag am Platinring R. Das andere Quadrantenpaar lag am Zink Z; beide Quadrantenpaare lagen an dem jeweils benutzten Widerstand W und konnten kurz geschlossen werden.

Als Quelle der ultravioletten Strahlen diente eine Quarz-Quecksilberlampe von Heraeus. Der Abstand der Lichtquelle vom Zink betrug etwa 75 cm. Die Lampe wurde mit einer Spannung von 220 Volt betrieben, die fast in allen Fällen einer Akkumulatorenbatterie, nur ausnahmsweise dem städtischen Netz entnommen wurde, da sich hierbei Schwankungen des lichtelektrischen Stromes geltend machten. Zum Öffnen und Schließen der Belichtung diente ein Blechvisier über dem Quarzfenster, das elektrisch vom Beobachtungsplatze aus bedient werden konnte. Die Quecksilberlampe brannte dauernd.

Die Meßmethode.

In den Gebieten der schnellen Änderung des lichtelektrischen Stromes mit der Zeit war es erforderlich, daß eine sehr genaue Registrierung der Zeit erfolgte, zu der der Strom gemessen wurde. Es wurde deshalb jede Ablesung am Elektrometer mit Hilfe eines Telegraphenapparats registriert. Registrierungsfehler eingerechnet, mögen die Angaben etwa auf eine Sekunde genau sein. Da die Schwingungsdauer 12,4 Sekunden betrug, der Strom aber oft schon nach Verlauf von anderthalb Minuten einen konstanten Wert angenommen hatte, so konnten im Gebiete stärkster Stromänderungen nur die Umkehrpunkte abgelesen werden. Die wahre Stromzeitkurve mußte dann zwischen ihnen verlaufen. Im Gebiete geringer Stromänderungen wurde die Zeit an einer Sekundenuhr abgelesen. Die durchschnittliche Genauigkeit betrug etwa + 5 Sekunden.

Als Nullpunkt der Zeit bei den aufgenommenen Kurven dient die Zeit der letzten Schabung. Alle Kurven besitzen gleichen Maßstab. Auf der Abszisse ist die Zeit in Minuten, auf der Ordinate der lichtelektrische Strom in Skalenteilen dargestellt.

Die Messungen.

Die ersten Versuche gelangten mit dem zuerst beschriebenen Schaber zur Ausführung. Die Versuchsanordnung war nicht mit Kalium beschickt worden und wurde mit Hilfe der Gaedeschen Molekularpumpe evakuiert. Durch einen Kahlbaumschen Hahn wurde das System vor jeder Messung von der Pumpe abgeschlossen und diese abgestellt, da sich die Erschütterungen derselben als störend erwiesen. Bei diesen Versuchen war ein Manometer noch nicht angeschlossen, so daß die Entladungen eines Induktors als Kriterium für das Vakuum dienen mußten. Zuerst wurde durch diese Entladungen, die stets zwischen den Elektroden des Destillationsrohres D stattfanden, und durch das sich in die Nebenrohre erstreckende Glimmlicht reichlich Gas abgegeben; später hielt selbst nach längerem Induktorgange grünes Leuchten an.

Nachdem bereits reichlich Gas aus den Glaswänden ausgetrieben worden war, wurde nach 10 Schabungen Reihe 3 (Fig. 5) aufgenommen. Da die wahre Stromzeitkurve zwischen den Umkehrpunkten verlaufen muß, so ergibt sich eine Kurve steilen Anstieges, die erst nach einigen Minuten zu sinken beginnt. Zunächst lag die

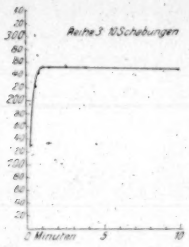


Fig. 5.

Befürchtung nahe, es könnte dieser Verlauf der Kurve durch das Abfließen einer statischen Ladung erzeugt sein, die durch die Reibung des Schabers an der Glaswand entstanden sein konnte und einen Ausschlag des Elektrometers in entgegengesetzter Richtung hervorrief, so daß der lichtelektrische Strom so lange kompensiert oder vermindert wurde, bis die Ladung ganz ihren Weg zur Erde gefunden hatte. Dann hätte aber auch der durch statische Ladungen erzeugte Strom wahrgenommen werden müssen, wenn nach Schaben, Schaberheben und Öffnen der Quadranten kein Licht eingeschaltet wurde. Trotz zahlreicher Beobachtungen, die sich alle vom Augenblick der letzten Schabung über mehrere Minuten erstreckten, also über Zeiträume, nach denen der lichtelektrische Strom längst seinen konstanten Wert angenommen hatte, konnte niemals auch nur der geringste Ausschlag wahrgenommen werden. Es ist also keinem Zweifel unterworfen, daß tatsächlich ein Ansteigen des Stromes beobachtet wurde.

Es mögen nun noch folgende Versuche mitgeteilt werden:

Nach erneutem Pumpen war das Vakuum so gut geworden, daß nach Anlegen eines Induktors von 5 cm Schlagweite an einer Parallelfunkenstrecke ein prasselndes Funkenband überging und sich im Rohre nur ab und zu ein grünliches Leuchten zeigte. Nach 20 Schabungen wurde Reihe 15 (Fig. 6) aufgenommen. Sie

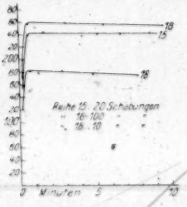


Fig. 6.

zeigt wieder einen deutlichen Anstieg der Stromzeitkurve mit anschließender Tendenz zur Ermüdung. Der Vorgang erklärt sich wohl am einfachsten dadurch, daß durch die Entladungen einerseits das Zink gasfrei gemacht worden war, weshalb an ihm keine Reaktion eintreten und kein lichtelektrischer Strom entstehen konnte, andererseits aber auch durch die Entladungen die vor diesen Versuchen noch nicht erhitzten Teile des Glasrohrs reaktionsfähige Gase abgegeben hatten, die nun allmählich zum Zink hinüberdiffundierten und dort durch chemische Umsetzung in der oben geschilderten Weise den lichtelektrischen Effekt hervorriefen. Mit 100 Schabungen folgte Reihe 16 (Fig. 6); auch sie zeigt einen starken Anstieg mit schwacher Ermüdung. Die nicht reproduzierte Reihe 17 mit 500 Schabungen deckt sich fast mit Reihe 18 (Fig. 6) mit nur 10 Schabungen. Reihe 19 brachte nichts Neues und ist deshalb auch nicht wiedergegeben.

Die Ströme der in Fig. 6 mitgeteilten Kurven unterscheiden sich um etwa 30 Proz. voneinander, und es könnte auf den ersten Blick fast so scheinen, als bestände ein Zusammenhang zwischen der Schabungszahl und der Stromstärke, derart, daß nach vielen Schabungen ein schwächerer Strom aufträte als nach wenigen. Daß ein solcher Zusammenhang in der Tat nicht besteht, beweist die nicht reproduzierte Reihe 17, die sich trotz ihrer 500 Schabungen fast ganz mit Reihe 18 (Fig. 6) deckt, während sie sonst noch niedriger als Kurve 16 (Fig. 6) verlaufen müßte. Viel wahrscheinlicher ist mir die Erklärung, daß durch das fortgesetzte Schaben Schichten des Zinks freigelegt werden, die reich an okkludierten Gasen sind, weil sie vor dem Schaben zu tief lagen, als daß die gasaustreibende Wirkung der Induktorentladungen bis zu ihnen gereicht hätte. Bei diesem Freiwerden reaktionsfähiger Gase durch das Schaben kann dann der Fall eintreten, daß der durch Diffusion bewirkte Anstieg durch die mit fortschreitender Reaktion eintretende Ermüdung gerade kompensiert wird. Ein Beispiel hierfür gibt Reihe 20 nach 100 Schabungen. Ohne Schwingungen auszuführen, die auf einen Anstieg des Stromes hingedeutet hätten, stellte sich das Elektrometer auf den konstanten Wert 274 ein, um alsbald langsam zu sinken; und auch bei den folgenden Kurven wurde nur der allmählich ermüdende Teil ohne vorangehendes Ansteigen beobachtet. Indessen wurde von der Wiedergabe all dieser Reihen abgesehen, da Beispiele dieser Art später gegeben werden sollen.

Nach Zerstörung des ersten Versuchsrohrs wurde ein zweites mit der verbesserten Schabvorrichtung benutzt. Gleichzeitig wurde ein Mac Leod und die rotierende Gaedesche Queck-

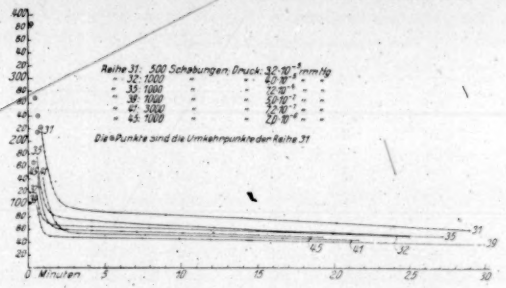


Fig. 7.

silberpumpe angeschlossen. Die Kühlschlangen wurden mit flüssiger Luft gekühlt. Unter diesen Bedingungen wurden alle weiteren Versuche ausgeführt.

Ohne Beschickung mit Kalium wurde das Vorratsrohr A zugeschmolzen und evakuiert. Die Pumpe wurde dauernd in Betrieb gehalten. Einer orientierenden Reihe nach 5000 Schabungen folgte Reihe 31 (Fig. 7) nach 500 Schabungen. Die Schabungszahl und Drucke dieser wie der anderen noch mitgeteilten Reihen sind aus der Figur ersichtlich. Alle Kurven zeigen eine starke Ermüdung.

Weder aus diesen Kurven, bei denen der Druck um das Tausendfache schwankt, noch aus den hier nicht mitgeteilten ist irgendwelcher Zusammenhang zwischen Druck, Stromstärke und Ermüdung zu ersehen. Vielmehr scheint gerade der Schluß berechtigt, daß bei hohem Vakuum, wo Stoßionisation nicht mehr in Frage kommt, selbst Druckschwankungen um mehr als das Mehrtausendfache ohne jeden Einfluß sowohl auf lichtelektrischen Effekt als Ermüdungserscheinung sind.

Da sich beim Zusammenblasen der Versuchsanordnung Wasserdampf niedergeschlagen hatte, so dürfte dieser als reagierendes Gas vor allem in Frage kommen.

Um am zweiten Rohre ebenso wie am ersten Erholung zu erhalten, wurde das Zink 20 Minuten lang zur Kathode einer Induktorentladung gemacht. Nach 1000 Schabungen ergaben sich Reihe 47 (Fig. 8) und, ohne weiteren Induktorgang, die in gleicher Figur wiedergegebenen Reihen. Druck und Schabungszahl gibt Fig. 8.

Alle drei Kurven sind genau vom gleichen Typ: zuerst steigen sie an, erreichen dann ein Maximum und fallen wieder langsam und immer langsamer ab. Erfolgt der Anstieg auch nicht so schnell wie bei den Reihen 3, 15, 16 und 18, bei denen der dritte Umkehrpunkt viel höher lag als der erste, so darf man die Kurven 47 bis 49 doch wohl als Zwischenstufen bei der Überführung des Ermüdungstyps in den Erholungstyp auffassen. Vor dem Induktorgang wiesen alle Kurven eine starke Ermüdung auf: im Rohre war viel Wasserdampf enthalten. Durch Reaktion wurde der lichtelektrische Strom

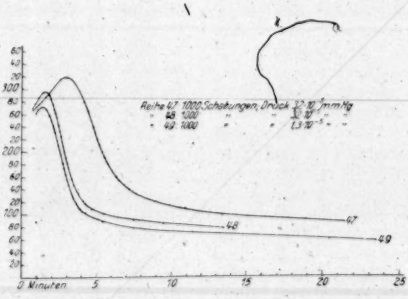


Fig. 8.

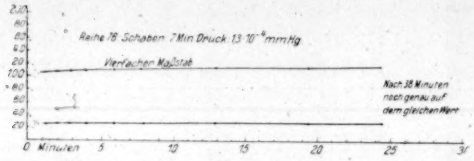


Fig. 9.

erzeugt, durch Schichtbildung trat Ermüdung ein. Durch die Entladungen sind aus den Glaswandungen neue Gase ausgetrieben. Durch Diffusion nimmt die Gaskonzentration an der Zinkoberfläche zu, und der Strom steigt so lange an, bis die Ausbildung einer schützenden Schicht Ermüdung eintreten läßt.

Es wurde nun das Vorratsrohr mit Kalium beschickt und abgeschmolzen; dann wurden unter Erhitzen des Kaliums auf 175° C und unter Anlegen von Glimmentladungen so lange Messungen ausgeführt, bis das Destillationsrohr einen Sprung erhielt. Da indessen die Ergebnisse, die mit diesem Rohre ausgeführt wurden, genau denen entsprechen, die nach der nächsten Kaliumfüllung erhalten wurden, so mögen sie vorläufig übergangen werden.

Nachdem das Kalium in der oben angeführten Weise behandelt und in das neue Vorratsrohr gebracht worden war, wurde dieses abgeschmolzen und evakuiert. Die nunmehr aufgenommenen Messungen zeigten Ermüdung wie früher. Das reagierende Gas wird auch hier Wasserdampf gewesen sein. Unter ständigem Weiterpumpen wurde dann das Destillationsrohr D 13 Stunden auf etwa 350° C erhitzt, um eine möglichst weitgehende Gasabgabe desselben zu erzielen. Nach seiner Abkühlung wurde Reihe 76 (Fig. 9) aufgenommen. Es ist hier schon eine weitgehende Absorption der reagierenden Gase durch das Kalium erfolgt, da die Kurve gar keine Ermüdung und nur noch eine ganz langsame Erholung zeigt.

Es wurde nunmehr das Kalium unter Erhitzen auf 400° C in das Destillationsrohr D hinüberdestilliert und die Anordnung von der Pumpe abgeschmolzen. Sofort anschließend wurde die hier nicht wiedergegebene Reihe 79 aufgenommen: nach 7 Minuten Schaben und bei einem Drucke, der während der Aufnahme zwischen 3,8 und $8{,}5 \times 10^{-3}$ mm Hg schwankte, stieg der Strom von 22,4 Skalenteilen in 39 Minuten um weniger als 8 Proz. Nachdem das Rohr einige Stunden ruhig gestanden hatte, wurde bei einem Druck von $1{,}9 \times 10^{-2}$ mm Hg nach 7 Minuten Schabung in Reihe 80 (Fig. 10) eine Kurve aufgenommen, deren Abweichungen von einer Parallelen zur Zeitachse, falls solche überhaupt vorhanden sind, innerhalb der Beobachtungsfehler liegen.

Um den lichtelektrischen Strom zum Verschwinden zu bringen, wurden Zink und Schaber von ihrer Erdung abgenommen. Das Kalium wurde auf 175° C erhitzt und der Glimmstrom angelegt. Als der Druck 8×10^{-4} mm Hg betrug, wurde der Induktor abgenommen und nach Wiederherstellung der Verbindungen geschabt. Nach 2 Minuten Schaben war nicht der geringste Ausschlag zu konstatieren. Bei der vorangegangenen Kaliumfüllung, deren Ergebnisse oben übergangen worden waren, ergab sich nach Glimmentladungen im Nebenrohre bei $1{,}7 \times 10^{-3}$ mm Hg Druck und bei 1000 Schabungen kein Ausschlag; nach weiteren 1000 Schabungen nur ein einziger von 17,2 Skalenteilen, nach dem die Nadel sofort wieder in die Ruhelage zurückpendelte; nach 4500 Schabungen zeigte sich ein konstanter Ausschlag von 52 Skalenteilen.

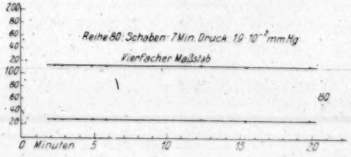


Fig. 10.

Es ist von großem Interesse, daß es ohne weiteres möglich war, den Effekt ganz beliebig auftreten und verschwinden zu lassen. Wurde nämlich das Zink geerdet, so fanden infolge der Potentialdifferenzen, die zwischen ihm und den Polen des Induktors herrschten, trotz der Erdung des Verbindungsrohrs zwischen Destillationsrohr D und Versuchsrohr G Entladungen statt, infolge deren Teile des Rohrs, die wegen der Siegellackkittungen nicht hatten erhitzt werden können, Gase abgaben. Wie aus Versuchen hervorgeht, die hier nicht mitgeteilt werden können, war diese Gasabgabe so stark, daß sie die Absorption

durch das Kalium nahezu kompensierte. Nach Entladungen, bei denen das Zink geerdet gewesen war, konnte der lichtelektrische Effekt niemals beseitigt werden. Da Messungen nur dann vorgenommen werden konnten, wenn die Entladungen abgestellt waren, und da die Reaktionsfähigkeit des Kaliums ohne diese außerordentlich verringert ist, so blieben die nach Abstellen der Glimmentladungen noch abgegebenen Gase im Versuchsrohre und riefen am Zink Reaktionen hervor, die einen lichtelektrischen Effekt auslösten.

Zusammenfassung.

Die am Zink erhaltenen Resultate lassen sich dahin zusammenfassen:

1. Reine Zinkoberflächen geben bei Ausschluß reaktionsfähiger Gase keinen meßbaren lichtelektrischen Effekt. Dieser ist kleiner als ein Tausendstel desjenigen, der unter gewöhnlichen Versuchsbedingungen erhalten wird.

2. Bei Gegenwart reagierender Gase läßt sich die Ermüdung durch Reaktion mit adsorbierten Gasen erklären, die Erholung durch Diffusion reaktionsfähiger Gase nach dem Zink hin, wobei die Geschwindigkeit der Reaktion und mit ihr die Stärke des lichtelektrischen Stromes durch die Konzentration reaktionsfähiger Gase am Zink bedingt wird. Durch geeignetes Zusammenwirken beider Vorgänge kann der zeitliche Verlauf des lichtelektrischen Stromes auf das verschiedenartigste beeinflußt werden, wodurch die eingangs diskutierten Kurven entstehen. Diese konnten beliebig durch Variation der Versuchsbedingungen ineinander übergeführt werden. Diese Erscheinungen sollen später ausführlicher behandelt werden.

3. Der Druck neutraler Gase hat, soweit keine Stoßionisation in Frage kommt, keinen Einfluß auf die Größe des lichtelektrischen Effekts.

Ich erfülle die angenehme Pflicht, Herrn Professor Fredenhagen, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, für sein unermüdliches Interesse, das er ihr entgegenbrachte, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Herzlichen Dank auch Herrn G. Kadenbach, der mich bei so mancher experimentellen Schwierigkeit aufs freundlichste unterstützte.

Leipzig, Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität, Dezember 1913.

(Eingegangen 12. Dezember 1913.)

Experimentelle Untersuchungen über den Debyeeffekt.

Von M. v. Laue und J. Steph. van der Lingen.

Nach Debyes Theorie des Temperatureinflusses auf die Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen[1]) nimmt mit wachsender Temperatur die Helligkeit der Interferenzpunkte ab; davon werden aber die dem einfallenden Strahl benachbarten Punkte im allgemeinen weniger beeinflußt, als die von ihm weiter entfernten. Der Zweck der zu beschreibenden Versuche war die qualitative Prüfung dieser Folgerung. Die andere Folgerung, daß sich die Lage und Schärfe der Punkte durch Temperaturveränderungen nicht beeinflussen läßt, haben schon frühere Versuche von de Broglie[2]) bestätigt.

Es kam dabei darauf an, zwei Exemplare desselben Kristalls bei verschiedenen Temperaturen, sonst aber unter möglichst gleichen Umständen zu untersuchen. Wir durchstrahlten sie daher gleichzeitig mit derselben Röhre in der gleichen kristallographischen Richtung; die Abstände von der Antikathode (50—60 cm) stimmten bei ihnen überein, desgleichen ihre Dicken und die Blenden, die übrigens zwecks Verkürzung der Expositionszeiten ziemlich groß, nämlich 3 mm im Durchmesser, gewählt waren. Der einzige Unterschied zwischen beiden Kristallen bestand darin, daß der eine in einem elektrischen Ofen saß, der eine dauernde Erwärmung auf 600° und darüber gestattete, der andere dagegen entweder auf Zimmertemperatur oder auch in einem mit flüssiger Luft gefüllten Dewargefäß war. Bei dem geheizten Kristall mußten die Röntgenstrahlen einige zur Wärmeisolation eingeschaltete Schichten Asbest durchdringen, im ganzen von $2^1/_2$ cm Dicke. Zur Ausgleichung der geringen Absorption, die sie dabei erfuhren, wurde auch bei dem anderen Kristall, wenn er sich auf Zimmertemperatur befand, eine solche Asbestschicht eingeschaltet. Saß er hingegen in einem Dewargefäß, so war die Absorption von den vier versilberten Glaswänden und der 3,6 cm dicken Schicht flüssiger Luft weit größer als die der genannten Asbestschicht und machte für die Expositionszeit schon sehr viel aus. Wir haben daher mit flüssiger Luft den Versuch nur einmal ausgeführt.

Figur 1, ein horizontaler Schnitt durch die Versuchsanordnung, zeigt die beiden Bleikästen I und II, welche je einen Kristall mit den zugehörigen Blenden und photographischen Platten enthalten, in ihrer Lage gegeneinander und die Röntgenröhre. In dem Kasten III werden

1) P. Debye, Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 738, 1913.
2) M. de Broglie, vgl. z. B. Le Radium 10, 186, 1913.

andere Versuche (mit flüssigen Kristallen) angestellt. Figur 2 gibt einen senkrechten Durchschnitt durch den Heizofen; das von oben eingeführte, dicht an dem Kristall anliegende Thermoelement ist ein von der Physikalischen Reichsanstalt geeichtes Platin-Platinrhodiumelement[1]). Der Kristall konnte hier mit Hilfe der Schrauben S und der Drehung des Kegels AA, an welchem er festgeschraubt ist, in der üblichen Art mittels eines Fernrohres optisch eingestellt werden.

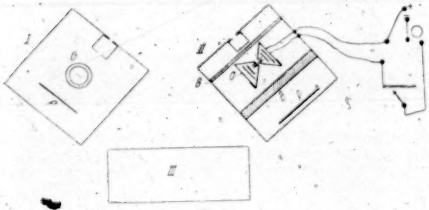


Fig. 1.

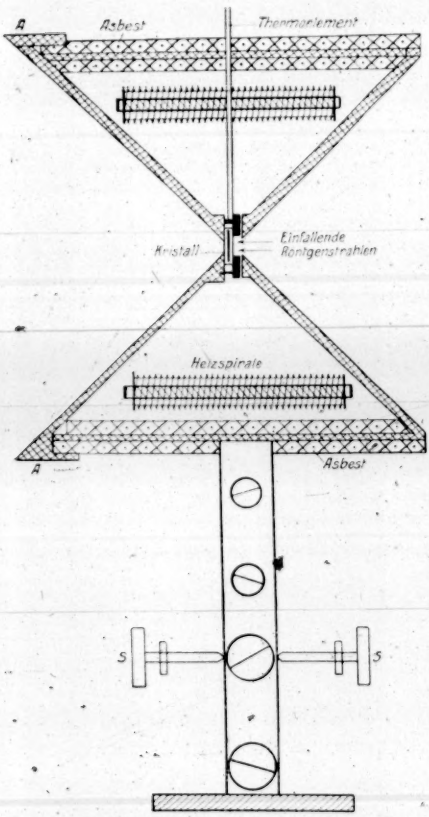


Fig. 2.

Die Röntgenröhren waren von der Firma E. Gundelach auf besonders starke Belastung hin gebaut. Sie vertrugen eine dauernde Belastung von 6 Milliamp., ohne sich in der Härte zu ändern[2]).

Durchstrahlt wurde Steinsalz, und zwar parallel einer vierzähligen Achse. Bei dem ersten Versuch damit war der eine Kristall auf Zimmertemperatur, der andere auf 320°; die Expositionszeit betrug 3 Stunden. Bei dem geheizten Kristall fanden sich keine Interferenzpunkte, während diejenigen, welche von früheren Untersuchungen her als die stärksten bekannt sind, bei den anderen schwach aber unverkennbar hervortraten. Bei einem zweiten Versuch waren die Temperaturen 320° und —190° (flüssige Luft). Trotz einer erheblich längeren Expositionszeit (über 8 Stunden) war bei dem wärmeren Kristall keine Spur von Interferenzpunkten zu finden, während sie bei dem abgekühlten wohl infolge der starken Absorption durch das Dewargefäß und die flüssige Luft schwächer waren als bei dem ersten Versuch bei Zimmertemperatur. Immerhin traten sie während des Entwickelns deutlich hervor, während sie beim Fixieren wie alle sehr geringen Schwärzungen der Platte wieder verschwanden. Trotzdem wir so das Bild nicht festhalten konnten, sind wir gegen eine Täuschung gesichert. Erstens nämlich gaben die Platte und der Film, der wie auch sonst während der Exposition unmittelbar vor ihr gestanden hatte, dieselben Punkte, zweitens bildeten diese wieder die wohlbekannte vierzählig-symmetrische Interferenzfigur am Steinsalz. Dieser Versuch scheint uns um so beweisender, da die Absorption der Röntgenstrahlen bei dem gekühlten Kristall, wie schon gesagt, ungleich größer war als bei dem erwärmten.

Sodann wurden zwei Glimmerstücke bei Zimmertemperatur und 400° miteinander verglichen; die Durchstrahlungsrichtung stand auf

1) Um zu prüfen, ob das Thermoelement die Temperatur des Kristalles richtig anzeigt, wurde einmal ein Stück Lithiumchlorid an dessen Stelle gesetzt, dessen Schmelzpunkt nach den Tabellen von Landolt und Börnstein zwischen 600 und 614° liegt. Nachdem der Ofen geheizt war, bis das Thermoelement 620° maß, und einige Zeit auf dieser Temperatur gelassen war, zeigte sich, daß Lithiumchlorid geschmolzen war.

2) Wir möchten der Firma E. Gundelach auch an dieser Stelle unseren Dank für ihr freundliches Entgegenkommen aussprechen.

ihren natürlichen Spaltflächen senkrecht. Nach 16stündiger Exposition waren bei beiden zahlreiche Interferenzpunkte deutlich zu sehen, doch fehlten viele der schwächeren Punkte, die beim kühleren Kristall zu sehen waren, völlig bei dem erwärmten; auch war der allgemeine Abfall der Helligkeit mit wachsendem Abstand vom einfallenden Strahl bei dem erwärmten erheblich stärker.

Wir schließen aus diesen Versuchen, daß — wenigstens qualitativ — die Debyesche Theorie den Temperatureinfluß richtig wiedergibt.

Diese Untersuchungen sind mit Hilfe der vom Institut international de physique Solvay und der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften gewährten Mittel durchgeführt. Wir möchten auch an dieser Stelle unserem Dank für diese Ausdruck geben.

Zürich, Physik. Institut der Universität, Dezember 1913.

(Eingegangen 9. Dezember 1913.)

Eine Bemerkung über die Interferenzfiguren hemiedrischer Kristalle.
(A Note on the Interference Figures of Hemihedral Crystals.)

Von W. Lawrence Bragg.

Es ist oft bemerkt worden, daß die Röntgenstrahleninterferenzphotogramme mit einem Zinkblendekristall, wie sie ursprünglich Herr M. v. Laue und seine Mitarbeiter erhalten haben, keine Andeutung der hemiedrischen Natur dieses Kristalls aufweisen. Ein Photogramm, das aufgenommen wurde, während die einfallenden Strahlen senkrecht zu einer Würfelfläche (100) waren, zeigt eine vollkommene vierfache Symmetrie, obgleich die auf dieser Fläche senkrechte Symmetrieachse des Kristalls nur eine zweifache ist. Andererseits liefern Eisenpyrite unter ähnlichen Verhältnissen starke Anzeichen für die zweifache Natur der zu einer Würfelfläche senkrechten Achse; es zeigt sich eine ausgesprochene Abweichung von der vierfachen Symmetrie in der Intensität der Flecke in dem Photogramm. Herr Friedrich hat derartige Photogramme erhalten[1]), und ich habe einige, die denselben Punkt beleuchten.

Meines Erachtens ergibt sich eine einfache Erklärung für diese Tatsachen, wenn man den Bau dieser Kristalle betrachtet. Die Struktur der Zinkblende haben mein Vater und ich in unserer Arbeit über die Struktur des Diamants[2]) angegeben. Die Anordnung der Atome in Eisenpyriten habe ich in einer noch unveröffentlichten neueren Mitteilung an die Royal Society angegeben. In beiden Fällen stimmt die Symmetrie des Punktsystems mit jener des wirklichen Kristalls überein.

Die Hemiedrie der Zinkblende besteht darin, daß sie Achsen dreifacher Symmetrie besitzt, die polar sind. Die Fläche (111) am einen Ende einer solchen Achse ist von der Fläche ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$) am andern Ende verschieden, obwohl in einem Kristall der holoedrischen Klasse diese Flächen identisch sein würden. Nach unserer Ansicht über die Struktur haben die zur Fläche (111) parallelen Ebenen des Kristalls die in Fig. 1 schematisch dargestellte Anordnung, bei

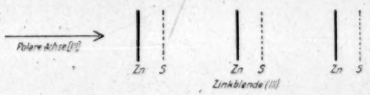


Fig. 1.

der solche Ebenen, die nur Zinkatome enthalten, und solche, die nur Schwefelatome enthalten, paarweise gruppiert sind.

Es ist klar, daß die zu diesen Ebenen senkrechte Achse eine polare ist. Trotzdem würden wir nach der Theorie erwarten, daß die Reflektion von Röntgenstrahlen an der Ebene ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$) mit der Reflektion an der Ebene (111) identisch sein würde. Jede Ebene der Struktur reflektiert nur einen winzigen Bruchteil einer über sie hinweggehenden einfallenden Welle. Ein auftreffender Impuls wird von den Schwefelebenen als ein Wellenzug reflektiert und von den Zinkebenen als ein Wellenzug, der mit dem ersten nicht in Phase ist. Bei der Reflektion an der Fläche (111) wird die erste Gruppe ein wenig gegen die zweite in Phase verzögert, bei der Reflektion an der Fläche ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$) eilt sie in Phase vor. In beiden Fällen aber werden sich die beiden Gruppen vereinigen und dieselbe Resultierende liefern.

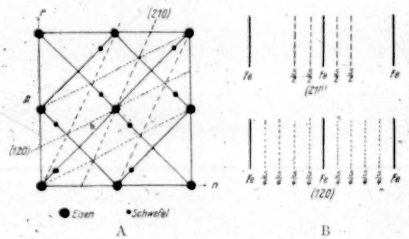
Dies ist nur ein Beispiel für eine allgemeine Regel, nämlich dafür, daß die Flächen an den beiden Enden einer polaren Achse dieselbe Reflektion der Röntgenstrahlen liefern werden, vorausgesetzt, daß jedes einzelne Atom die Röntgenstrahlen ganz unabhängig von seinen Nachbaratomen beugt. Wir müssen ferner annehmen, daß die Phasendifferenz solcher Wellen, die an einem derartigen Paar von Zink- und Schwefelebenen reflektiert werden, nur von dem Unterschiede des durchlaufenen Weges abhängt, und daß die Natur des Atoms auf die Phase keinen Einfluß hat. In unserer obengenannten

1) Vgl. v. Laue, diese Zeitschr. **14**, 1078, 1913.
2) W. H. Bragg and W. L. Bragg, „The Structure of the Diamond". Proc. Roy. Soc. A. **89**, 277, 1913.

Arbeit über die Eisenpyrite haben wir gezeigt, daß dies der Fall zu sein scheint.

Wir können daher nicht erwarten, irgendwelche Anzeichen für die hemiedrische Natur der Zinkblende zu finden.

Bei den Eisenpyriten ist die Hemiedrie nicht die Folge des Vorhandenseins polarer Achsen. Die Flächen mit den Indizes (120) und (210) würden identisch sein, wenn der Kristall holoedrisch wäre, aber die eigentümliche Symmetrie der Pyritklasse macht sie verschieden. Daß diese Verschiedenheit einer Verschiedenheit in der Anordnung der zu diesen beiden Flächen parallelen Ebenen entspricht, wird aus Fig. 2 ersichtlich.



Die Struktur von Eisenpyriten, auf eine Würfelfläche projiziert.

Fig. 2.

Die Figur zeigt die Anordnung von Eisen- und Schwefelatomen im Einheitswürfel, auf die Würfelfläche projiziert. Die beiden Achsen sind senkrecht zur Zeichnungsebene angenommen, und die Ebenen (120) und (210) sind daher die Ebenen senkrecht zu den in Fig. 2A durch diese Indizes bezeichneten Linien. Ihre Anordnung ist in Fig. 2B angegeben, und es ist ersichtlich, daß sie verschieden sind. Für die Ebenen (210) ist der Abstand, in dem sich ihre Anordnung wiederholt, doppelt so groß wie für die Ebenen (120). Wir haben daher allen Grund zu der Annahme, daß die Reflektion von Röntgenstrahlen seitens dieser beiden Formen verschieden sein wird.

Ich habe hier als Beispiel die beiden Strukturen benutzt, die wir tatsächlich der Zinkblende und den Eisenpyriten zuschreiben, aber die Beweisführung ist nicht von der Richtigkeit dieser Strukturen abhängig. Ich wollte nur zeigen, daß wir, falls unsere Annahmen richtig sind, keinerlei Unterschied in der Reflektion von Röntgenstrahlen an den Ebenen (hkl) und $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ eines Kristalls finden werden. Es werden sich daher alle Kristalle, deren Hemiedrie auf der Differenzierung solcher entgegengesetzter Ebenen beruht, gegen die Röntgenstrahlen wie holoedrische verhalten. Falls der Kristall auch dann noch hemiedrisch ist, wenn wir entgegengesetzte Ebenen (hkl) und $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ als identisch rechnen, so wird sich diese Hemiedrie in den Photogrammen zeigen. Beispielsweise werden Fluor, Zinkblende und Kuprit holoedrisch erscheinen, aber Pyrite und Ullmannit hemiedrisch. Diese Kristalle sind Beispiele der fünf Klassen des regulären oder kubischen Systems.

Universität Leeds, 21. November 1913.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 2. Dezember 1913.)

Nachtrag.

Seit der Niederschrift des Vorstehenden habe ich mit Hilfe des Röntgenstrahlen-Spektrometers die Ebenen (111) und (1̄11) von Zinkblende sowie die Ebenen (120) und (210) von Eisenpyriten miteinander verglichen. Die erhaltenen Spektren liefern eine sehr überzeugende Bestätigung der von mir angeführten Beweisgründe; sie sind hier in Fig. 3 dargestellt. Unterschiede,

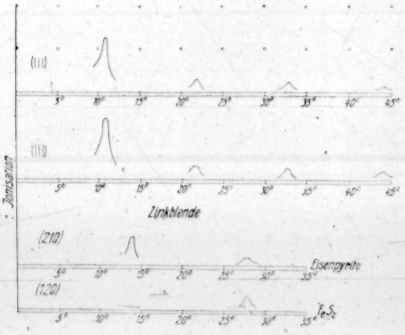


Fig. 3.

wie sie zwischen den von den Flächen (111) und (1̄11) der Zinkblende erhaltenen Reflektionen bestehen, lassen sich durch Versuchsfehler erklären, denn aufeinanderfolgende Bestimmungen der von einer und derselben Fläche erhaltenen Spektren würden wahrscheinlich nicht besser untereinander übereinstimmen. Ich benutzte eine Kristallplatte von ungefähr 3×1 cm, die senkrecht zu einer Achse dreifacher Symmetrie geschnitten war, und trug dafür Sorge, daß die Flächen (111) und (1̄11) des Schnittes in jeder Hinsicht so weit wie möglich identisch waren. Die Ähnlichkeit der in diesem Falle gewonnenen Ergebnisse bildet eine Stütze für die Ansicht, daß Flächen (hkl) und $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ irgendeines Kristalls die Röntgenstrahlen in ähnlicher Weise reflektieren werden.

Andererseits zeigen die Spektren, die von den Flächen (210) und (120) der Pyrite herrühren, also von Flächen, die wegen der Hemiedrie dieser Kristalle verschiedenen Formen angehören, dementsprechend eine Verschiedenheit. Die Kurve, welche die Reflektion von der Fläche (210) wiedergibt, hat eine kräftige erste Spitze bei 13,8°, die Kurve für die Fläche (120) hat ihre erste Spitze bei 27,8°. Dies ist auf Grund der Struktur dieser Ebenen, wie sie in Fig. 2 B angegeben ist, zu erwarten; die genannte Figur zeigt, daß die Versetzung bei den Ebenen (210) doppelt so groß ist wie bei den Ebenen (120). Es ist daher leicht verständlich, wieso mit Eisenpyriten aufgenommene Photogramme sehr starke Anzeichen der hemiedrischen Natur dieser Kristalle liefern, während die mit Zinkblende aufgenommenen keine derartigen Anzeichen liefern.

6. Dezember 1913.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 10. Dezember 1913.)

Über die Schärfe der mit Röntgenstrahlen erzeugten Interferenzbilder.

Von E. Schrödinger.

Die Herren Born und v. Kármán[1]) haben vor einiger Zeit ein dynamisches Modell für Kristalle des regulären Systems erdacht, welches das thermische Verhalten eines solchen Kristalls sehr gut wiederzugeben scheint, insbesondere die Beziehung zwischen den thermischen und den elastischen Eigenschaften. Es gelang an der Hand des Modells, nicht nur die Quantenformel für die spezifischen Wärmen in eine Form zu bringen, welche sich dem wahren Verlauf weit besser anschließt, als die ursprüngliche Einsteinsche Formel[2]), sondern auch die einzelnen Reststrahlenfrequenzen mit bemerkenswerter Genauigkeit aus den Elastizitätskonstanten der betreffenden Kristalle zu berechnen. Der wesentliche Fortschritt des Born-Kármánschen Modells bestand darin, daß nicht, wie in der ersten Einsteinschen Fassung, die Wärmeschwingungen der Atome als voneinander unabhängig und daher monochromatisch betrachtet wurden[3]). Vielmehr suchten sie den tatsächlichen Verhältnissen dadurch nahezukommen, daß sie die Atome nicht an ihre Mittellagen, sondern aneinander durch quasielastische Kräfte gekoppelt vorstellten. Hierdurch erhalten sie, statt eines monochromatischen, ein System mit einem ganzen Spektrum von Eigenschwingungen, und gerade hierin liegt seine Leistungsfähigkeit für die quantitativ richtige Wiedergabe der oben genannten Phänomene.

Es scheint mir nun, daß dieses Modell auch das geeignetste sein müßte, um den wahrscheinlichen Einfluß der Wärmebewegung auf die Interferenzerscheinungen zu beurteilen, die mit Röntgenstrahlen an regulären Kristallen erhalten werden. Schon die Rechnung, die Herr Debye[1]) an dem monochromatischen Modell durchgeführt hat, hat wertvolle Aufschlüsse geliefert und insbesondere den Zusammenhang aufgedeckt, der zwischen der ausgezeichneten Eigenschaft des Diamanten, in großen Raumwinkeln und sogar nach rückwärts Interferenzbilder zu liefern, und seiner geringen Kompressibilität besteht. Nun spielt im Debyeschen Endresultat gerade die Schwingungszahl der Atome die entscheidende Rolle. Es ist daher zu erwarten, daß der Übergang zu dem gewiß berechtigteren polychromatischen Modell das Resultat ändert, und, wenn die Änderung wesentlich ist, daß sie den Tatsachen besser entspricht.

In dieser Mitteilung wird zunächst ein eindimensionales Atomgitter mit eindimensionaler Wärmebewegung behandelt, da das dreidimensionale Problem, wenn man die Annahme der Unabhängigkeit der Atomschwingungen fallen läßt, ziemlich bedeutende mathematische Schwierigkeiten bietet. Das wesentlich neue Resultat der folgenden Überlegungen, nämlich, daß die Interferenzbilder mit steigender Temperatur immer breiter und verschwommener werden und allmählich in eine gleichmäßige Erhellung des Gesichtsfeldes übergehen, wird sicher auch beim Übergang zu drei Dimensionen erhalten bleiben. Ebenso halte ich zunächst noch an der statistischen Mechanik in ihrer gewöhnlichen Form fest, d. h. ich nehme Äquipartition der Energie an. Es ist aber vorauszusehen, daß gerade das hier zugrunde gelegte Modell die Berücksichtigung der Quantentheorie in der einfachsten und richtigsten Form ermöglichen wird, da es, wie die Arbeiten von Born und v. Kármán und Thirring gezeigt haben, das „elastische Spektrum" eines regulären Kristalls gut wiederzugeben scheint. Ich bin damit beschäftigt, die Theorie auf den dreidimensionalen Fall und unter Rücksicht auf die Quantenhypothese auszudehnen.

1) Born u. v. Kármán, diese Zeitschr. **13**, 297, 1912; **14**, 15 u. 65, 1913. Siehe auch Hans Thirring, diese Zeitschr. **14**, 867, 1913.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. **22**, 180 u. 800, 1907.

3) Bekanntlich hat Einstein selbst auf das Ungenügende des monochromatischen Modells für das Problem der spezifischen Wärmen hingewiesen; Ann. d. Phys. **34**, 170 u. 590, 1911; **35**, 679, 1911.

1) P. Debye, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 678 u. 738, 1913.

Im folgenden schließe ich mich in allen Äußerlichkeiten möglichst nahe an die Darstellung des Herrn Debye an, um den Vergleich zu erleichtern.

Auf der x-Achse eines ebenen Koordinatensystems liegen $2N+1$ Atome, deren Ruhelagen den konstanten Abstand a voneinander haben. In die Ruhelage des mittleren Atoms legen wir den Ursprung. Die Atome seien gezwungen, auf der x-Achse zu bleiben, sollen sich aber auf ihr infolge der Wärmebewegung aus ihren Ruhelagen entfernen. Je zwei Nachbaratome sollen eine Kraft aufeinander ausüben, welche im Abstand a verschwindet, der Abstandsänderung proportional, und zwar in größerem Abstand als a anziehend, in kleinerem Abstand abstoßend ist. Eines oder beide Randatome können wir uns in ähnlicher Weise elastisch an ihre Ruhelage gebunden denken; es kommt darauf übrigens nicht wesentlich an.

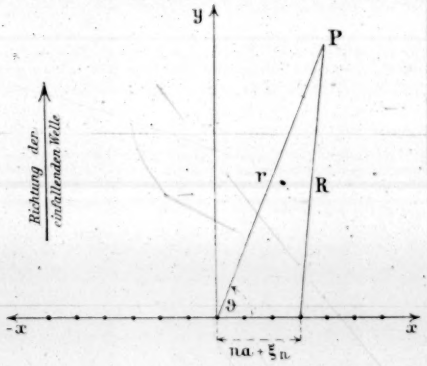


Fig. 1.

Jedes Atom enthalte nun einen elektrischen Resonator (gebundenes Elektron), der Schwingungen in der z-Richtung ausführt (senkrecht zur Zeichenebene). Diese Resonatoren sollen durch eine von der negativen y-Richtung her einfallende primäre ebene Welle angeregt werden, so daß alle dieselbe Phase haben, auch dann, wenn die Anregung etwa stoßweise erfolgt und ein solcher Stoß die Atome nicht in ihrer Ruhelage antrifft.

Wir wollen die (relative) Verteilung der Strahlungsintensität berechnen, welche die Atomresonatoren auf einem Kreis in der xy-Ebene hervorbringen, dessen Radius groß ist gegen die Länge der Atomreihe, und zwar unter Rücksicht auf die Wärmebewegung, d. h. die mittlere Intensität für die verschiedenen Konfigurationen, welche das Punktgitter nacheinander annimmt. Wir berechnen also zunächst die Intensitätsverteilung für eine bestimmte Konfiguration, sodann, nach den Gesetzen der statistischen Mechanik, die Wahrscheinlichkeit dieser Konfiguration und integrieren das Produkt über alle möglichen Konfigurationen. Dieses Verfahren rührt von Debye her und ist berechtigt, wenn

1. die Elektronenschwingungen sehr rasch erfolgen gegenüber den Lagenänderungen der Atome;

2. die Geschwindigkeit der letzteren klein ist gegen die Lichtgeschwindigkeit, so daß der Dopplereffekt zu vernachlässigen ist;

3. die Beobachtungsdauer so lang ist, daß sich während derselben alle Konfigurationen wirklich mit einer ihrer statistischen Wahrscheinlichkeit entsprechenden Häufigkeit realisieren.

Daß die ersten beiden Bedingungen erfüllt sind in dem Fall, auf welchen unsere Rechnung angewendet werden soll, davon überzeugt man sich leicht durch einige kurze Überschlagsrechnungen. Die dritte Bedingung ist nichts anderes als die Einschränkung, die alle Naturgesetze sich seit Boltzmann gefallen lassen müssen.

Die elektrische Amplitude der Strahlung eines Resonators von der Wellenlänge λ ist im Abstand R in der Äquatorebene proportional dem reellen Teil von

$$e^{-ixR}\, e^{ixct}, \qquad (1)$$

wobei

$$x = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (2)$$

gesetzt ist, c die Lichtgeschwindigkeit, t die Zeit und λ die Wellenlänge der Strahlung bedeutet. Außer einem konstanten Faktor unterdrücken wir dabei auch den reziproken Radius, der als langsam veränderliche Funktion für uns nicht in Betracht kommt.

Seien nun x, y und $r = \sqrt{x^2+y^2}$ die Koordinaten bzw. der Fahrstrahl zum Aufpunkt P. Wir betrachten nur Punkte, deren r sehr groß ist gegen $(2N+1)a$. Ferner sei ξ_n die Entfernung des $n$ten Atoms aus seiner Ruhelage, so daß seine x-Koordinate $na+\xi_n$ beträgt. Für dieses Atom wird dann

$$R = r - \frac{x}{r}(na+\xi_n), \qquad (3)$$

wenn wir das Quadrat von $\frac{na+\xi_n}{r}$ gegen die Einheit vernachlässigen. Der $n$te Atomresonator erzeugt also im Punkte P die elektrische Amplitude

$$e^{ixct}\, e^{-ixr}\, e^{ix\frac{x}{r}(na+\xi_n)}. \qquad (4)$$

Setzen wir noch $\frac{x}{r} = \cos\vartheta$ und summieren über

alle n von $-N$ bis $+N$, so erhalten wir

$$e^{ixct}e^{-ixr}\sum_n e^{ix\cos\vartheta\,(na+\xi_n)}. \qquad (5)$$

Einen Ausdruck, welcher der Intensität proportional ist, erhalten wir durch Multiplikation mit dem konjugiert komplexen Wert:

$$J=\sum_m\sum_n e^{ixa\cos\vartheta\,(n-m)}\,e^{ix\cos\vartheta\,(\xi_n-\xi_m)}. \qquad (6)$$

Der reelle Ausdruck J ist ein relatives Maß der Intensität auf einem großen Kreis um den Ursprung in ihrer Abhängigkeit vom „Beugungswinkel" ϑ.

Nun haben wir die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wertesystems ξ_n zu berechnen. Sei m die Atommasse und $f\cdot\xi$ die elastische Kraft, welche Nachbaratome im Abstand $a+\xi$ aufeinander ausüben, dann lautet die Bewegungsgleichung des $n$ten Atoms

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\xi}_n &= f(\xi_{n+1}-\xi_n)-f(\xi_n-\xi_{n-1}) \\ &= f(\xi_{n+1}+\xi_{n-1}-2\xi_n). \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Die Auswertung des vielfachen Integrals gelingt sehr leicht, wenn man statt der ξ_n Normalkoordinaten einführt. Es ist bekanntlich immer möglich, $2N+1$ unabhängige Linearfunktionen der ξ_n, nennen wir sie a_{-N}, a_{-N+1}, $\ldots a_{N-1}$, a_N, anzugeben, derart, daß durch die Transformation

$$\xi_n=\sum_{i=-N}^{+N}\alpha_{ni}\,a_i \qquad (11)$$

die Ausdrücke (8) die Gestalt bekommen

$$U=\frac{m}{2}\sum_n\dot{a}_n^2 \qquad V=\frac{f}{2}\sum_n p_n a_n^2. \qquad (12)$$

Die Bewegungsgleichungen (7) nehmen in den Normalkoordinaten a_n die Gestalt an

$$m\ddot{a}_n=-fp_n a_n. \qquad (13)$$

Dies gilt auch noch für $n=+N$, wenn wir die an sich bedeutungslosen Zeichen ξ_{N+1} und ξ_{-N-1} als Nullen lesen und die Randatome elastisch an ihre Ruhelagen binden. Die potentielle und die kinetische Energie des Systems haben die Werte

$$V=\frac{f}{2}\sum_n(\xi_{n+1}-\xi_n)^2 \qquad U=\frac{m}{2}\sum_n\dot{\xi}_n^2. \qquad (8)$$

Die Wahrscheinlichkeit dw, daß die ξ_n Werte zwischen ξ_n und $\xi_n+d\xi_n$ haben, beträgt also

$$dw=Ce^{-\frac{f}{2kT}\sum_n(\xi_{n+1}-\xi_n)^2}d\xi_{-N}\cdots d\xi_{+N}. \qquad (9)$$

(k Boltzmannkonstante, T absolute Temperatur.) Den Proportionalitätsfaktor C werden wir später in bekannter Weise bestimmen. Wir erhalten nun die gesuchte mittlere Intensität J_m, indem wir die Ausdrücke (6) und (9) multiplizieren und nach allen ξ_n von $-\infty$ bis $+\infty$ integrieren:

$$J_m=C\sum_n\sum_m e^{ixa(n-m)\cos\vartheta}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{f}{2kT}\sum_l(\xi_{l+1}-\xi_l)^2+ix\cos\vartheta\,(\xi_n-\xi_m)}\cdot d\xi_{-N}\cdots d\xi_{+N}. \qquad (10)^1)$$

Jede mögliche Bewegung des Systems besteht also aus einer Superposition von Sinusschwingungen der Normalkoordinaten, wobei jede mit der ihr eigentümlichen Frequenz

$$\nu_n=\sqrt{\frac{f}{m}}\sqrt{p_n} \qquad (14)$$

schwingt. Auf die Bestimmung des Koeffizientenschemas der $(2N+1)^2$ Größen α_{ni} brauchen wir nicht einzugehen, sondern merken nur an, daß es die Bedingungen erfüllt

$$\left.\begin{aligned} \sum_n\alpha_{ni}\alpha_{nk} &= 0 \quad i\neq k \\ &= 1 \quad i=k. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Mit der Transformation (11), unter Rücksicht auf die transformierte Gestalt der potentiellen Energie nach (12), verwandelt sich nun der Ausdruck (10) in den folgenden:

$$J_m=\Delta C\sum_m\sum_n e^{ixa(n-m)\cos\vartheta}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{f}{2kT}\sum_l p_l a_l^2+ix\cos\vartheta\sum_l a_l(\alpha_{nl}-\alpha_{ml})}da_{-N}\cdots da_{+N}. \qquad (16)$$

Δ ist die Funktionaldeterminante der ξ_n nach den a_n, d. i. die Determinante des Koeffizientenquadrats der α_{ni}. Das $2N+1$fache Integral zerfällt nun in ein Produkt von Integralen von der Gestalt

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{fp_l}{2kT}a_l^2+ix\cos\vartheta\,a_l(\alpha_{nl}-\alpha_{ml})}da_l. \qquad (17)$$

Dieses Integral hat den Wert

$$\left(\frac{2\pi kT}{fp_l}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{kT}{2f}x^2\cos^2\vartheta\frac{(\alpha_{nl}-\alpha_{ml})^2}{p_l}}, \qquad (18)$$

und zwar auch dann, wenn $n=m$ ist.

Das vielfache Integral aus (16) erhalten wir, indem wir alle $2N+1$ Faktoren wie (18) multiplizieren. Das gibt

$$\left(\frac{2\pi kT}{f}\right)^{\frac{2N+1}{2}}\left(\prod_l p_l\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{kT}{2f}x^2\cos^2\vartheta\sum_l\frac{(\alpha_{nl}-\alpha_{ml})^2}{p_l}}. \qquad (19)$$

1) Unser Ausdruck unterscheidet sich von dem Debyeschen Ausdruck (5) (l. c., S. 682) nur durch den Wert der potentiellen Energie und dadurch, daß wir die Wärmebewegung auf die x-Achse beschränken.

Bevor wir dies in (16) eintragen, berechnen wir den Faktor C, indem wir (9) über alle Werte der Variablen integrieren und das Resultat der Einheit gleichsetzen. Natürlich führen wir ebenfalls die Normalkoordinaten ein:

$$1 = \Delta C \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{f}{2kT}\sum_l p_l a_l^2} da_{-N} \cdots da_{+N}. \quad (20)$$

Die Integrationen sind wieder unabhängig voneinander und man erhält leicht

$$\Delta C = \left(\frac{f}{2\pi kT}\right)^{\frac{2N+1}{2}} \left(\prod_l p_l\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

Indem wir jetzt (19) und (21) in (16) eintragen, erhalten wir

$$J_m = \sum_{\mu} \sum_{n} e^{i\pi a_n^*(n-m)\cos\vartheta - \frac{kT}{2f}\pi^2\cos^2\vartheta \sum_l \frac{(a_{nl}-a_{ml})^2}{p_l}}. \quad (22)$$

Unsere nächste Aufgabe wäre nun die Ausrechnung der Summen im Exponenten der e-Potenz. Dieselben lassen sich, wie hier nicht gezeigt werden soll, auf algebraischem Wege ermitteln, ohne daß Gleichungen von höherem als dem ersten Grade gelöst werden müssen. Der Gang der weiteren Rechnung wird aber äußerst unübersichtlich, weil die Bedingungen, unter denen die beiden Randatome stehen, die Rechnung wesentlich beeinflussen. Da aber die diesbezüglichen Annahmen physikalisch wohl ziemlich bedeutungslos sein dürften, gestatten wir uns mit Rücksicht darauf, daß N in Wirklichkeit jedenfalls eine sehr große Zahl ist, die Annäherung, jene Summen durch diejenigen Werte zu ersetzen, welche sie für eine unendliche Atomreihe annehmen. Dieses Verfahren, das übrigens auch die Herren Born und v. Kármán bei ihren Rechnungen an dem Punktgitter angewendet haben, ist vielleicht nicht vollkommen einwandfrei, erspart uns aber langwierige und uninteressante algebraische Überlegungen, die, wie ich glaube, jedes inneren Zusammenhanges mit dem vorliegenden physikalischen Problem entbehren.

Der Übergang vom endlichen auf das unendliche System ist in den zitierten Arbeiten von Born und v. Kármán ausführlich besprochen, wir können uns daher hier auf die notwendigsten Angaben beschränken. Das eigentümlichste an diesem Übergang ist dies: während bei endlichem N die Zahl der ξ_n und die Zahl der a_n natürlich immer genau gleich ist, unterscheiden sie sich, wenn der Ausdruck erlaubt ist, im transzendenten Fall der Größenordnung nach. Während nämlich das Wertsystem der ξ_n dann der abzählbar unendlichen Menge der ganzen Zahlen entspricht, gehen die Normalkoordinaten in ein Kontinuum über. An die Stelle der Abhängigkeit vom Index der Normalkoordinate tritt eine kontinuierliche Abhängigkeit von einer Variablen, die wir φ nennen werden. Während die endlichen Summen nach dem Index von ξ_n in unendliche Summen übergehen, erscheinen statt der Summen nach dem Index von a_n oder nach dem zweiten Index der a Integrale nach φ.

Das unendliche System homogener linearer Differentialgleichungen (7) läßt sich lösen durch den Ansatz

$$\left.\begin{aligned}\xi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} a(\varphi, t)\cos n\varphi \, d\varphi + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} b(\varphi, t)\sin n\varphi \, d\varphi.\end{aligned}\right| \quad (23)$$

Er befriedigt dieselben, wenn a und b den partiellen Differentialgleichungen genügen

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} &= -4f\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot a, \\ m\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} &= -4f\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot b,\end{aligned}\right| \quad (24)$$

auf welche man durch Einsetzen von (23) in (7) geführt wird. Jede Bewegung des Systems kann also als Superposition von Sinusschwingungen der kontinuierlichen Folge von Normalkoordinaten $a(\varphi, t)$ und $b(\varphi, t)$ angesehen werden, deren „Eigenfrequenz" als Funktion von φ zu betrachten ist,

$$\nu(\varphi) = 2\sqrt{\frac{f}{m}}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Das entsprechende p hat nach Analogie mit (14) den Wert

$$p(\varphi) = 4\sin^2\frac{\varphi}{2}. \quad (25)$$

Die Darstellung (23) entspricht der früheren Transformation (11). Der Umkehrung des Gleichungssystems (11) würde eine Fourierdarstellung der Funktionen $a(\varphi, t)$ und $b(\varphi, t)$ nach Kosinussen bzw. Sinussen der Vielfachen von φ entsprechen, in welcher $\frac{\xi_n + \xi_{-n}}{\sqrt{2\pi}}$ bzw. $\frac{\xi_n - \xi_{-n}}{\sqrt{2\pi}}$ die Fourier-Koeffizienten bilden. Aus (23) entnehmen wir, daß dem Koeffizientenschema der a_{nl} die Größen

$$\frac{\cos n\varphi}{\sqrt{2\pi}} \text{ und } \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{2\pi}} \quad (26)$$

entsprechen. In Analogie mit (15) gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos n\varphi\cos m\varphi+\sin n\varphi\sin m\varphi)\,d\varphi=0$$

für $n\neq m$ und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos^2 n\varphi+\sin^2 n\varphi)\,d\varphi=1,$$

welch letztere Relation natürlich durch geeignete Adjustierung des konstanten Faktors in (23) herbeigeführt werden mußte.

Für die $\sum_l{}'\frac{(\alpha_{nl}-\alpha_{ml})^2}{p_l}$, deren Auswertung uns zur Betrachtung des transzendenten Problems bewogen hat, erhalten wir nun nach (26) und (25):

$$\sum_l{}'\frac{(\alpha_{nl}-\alpha_{ml})^2}{p_l}$$

entspricht

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\cos n\varphi-\cos m\varphi)^2+(\sin n\varphi-\sin m\varphi)^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi$$

$$=S(n,m).$$

Obwohl sich das Integral S schlimmstenfalls auch direkt ausrechnen ließe, will ich doch den Weg andeuten, wie man es am raschesten findet. Indem man $\frac{\varphi}{2}$ als Integrationsvariable einführt, erhält man leicht

$$S(n,m)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(n-m)x}{\sin^2 x}\,dx.$$

Nun gibt die partielle Integration von $\frac{dx}{\sin^2 x}$

$$S(n,m)=\frac{n-m}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin 2(n-m)x\cos x}{\sin x}\,dx.$$

Durch Spaltung des Zählers findet man

$$S(n,m)=\frac{n-m}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin[2(n-m)+1]x}{\sin x}\,dx+$$

$$+\frac{n-m}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin[2(n-m)-1]x}{\sin x}\,dx.$$

Und von diesen beiden Integralen läßt sich zeigen, daß sie gleich sind, da ihre Differenz verschwindet. Daher ist jedes von ihnen auch gleich

$$\pm\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sin x}\,dx=\pm\pi,$$

je nach dem Vorzeichen von $n-m$. Somit ist

$$S(n,m)=|n-m|.$$

Diesen Wert tragen wir, wie vorgesehen, für die Summen im Exponenten von (22) ein und erhalten für die mittlere Intensität

$$J_m=\sum_m\sum_n e^{i\varkappa a\cos\vartheta(n-m)-\frac{kT}{2f}\varkappa^2\cos^2\vartheta\quad n-m}$$

Die Doppelsumme ist ausnahmslos über alle Werte von m und n (d. i. von $-N$ bis $+N$) zu erstrecken. Wir wollen zur Abkürzung setzen

$$\alpha=\varkappa a\cos\vartheta\qquad\varepsilon=\frac{kT}{f}\varkappa^2\frac{\cos^2\vartheta}{2},\qquad(27)$$

also

$$J_m=\sum_m\sum_n e^{i\alpha(n-m)-\varepsilon|n-m|}.\qquad(28)$$

Auf elementarem Wege, der nur durch die Achtung auf das Absolutzeichen etwas mühsam ist, findet man zunächst

$$J_m=(2N+1)+\frac{(2N+1)e^{i\alpha-\varepsilon}}{1-e^{i\alpha-\varepsilon}}+\\+\cdot-\frac{[1-e^{(i\alpha-\varepsilon)(2N+1)}]e^{i\alpha-\varepsilon}}{[1-e^{i\alpha-\varepsilon}]^2}-\cdot.\qquad(29)$$

Der Punkt, welcher an Stelle des dritten und fünften Gliedes steht, bedeutet jedesmal den konjugiert komplexen Wert des vorhergehenden Gliedes. Der Ausdruck J_m ist also reell, wie es sein muß. Man hat nun noch die imaginären e-Potenzen in passender Weise zu reellen Winkelfunktionen zusammenzufassen; dabei ist es vorteilhaft, die ersten drei und die letzten zwei Glieder von (29) zu vereinigen. Eine etwas umständliche Rechnung liefert den endgültigen Ausdruck von J_m:

$$J_m=\frac{\frac{1}{2}(e^{\varepsilon}-e^{-\varepsilon})(2N+1)}{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\varepsilon}{2}}-e^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2+2\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\\-\frac{\left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\varepsilon}{2}}-e^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2-(e^{\varepsilon}+e^{-\varepsilon})\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]\left[(1-e^{-(2N+1)\varepsilon})+2e^{-(2N+1)\varepsilon}\sin^2\frac{2N+1}{2}\alpha\right]+\frac{1}{2}e^{-(2N+1)\varepsilon}(e^{\varepsilon}-e^{-\varepsilon})\sin\alpha\sin(2N+1)\alpha}{\left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\varepsilon}{2}}-e^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2+2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]^2}\qquad(30)$$

Diese etwas kompliziert gebaute Formel gibt zusammen mit (27) die Intensität des Beugungsbildes als Funktion des Beugungswinkels ϑ und der Temperatur T. Wir müssen uns nun mit der Diskussion dieser Formel befassen, und ich bemerke vorausgreifend, daß für alle diejenigen Werte von ε, welche überhaupt eine merkliche Änderung des Beugungsbildes durch die Wärmebewegung ergeben, nur der erste Term von (30) in Betracht kommt.

Für $\varepsilon = 0$ geht (30) in die gewöhnliche Gitterformel über:

$$J_m = \frac{\sin^2 \frac{2N+1}{2}\alpha}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \qquad (31)$$

und zwar nimmt der zweite Term diesen Wert an, während der erste verschwindet. Für kleine ε kommt also der zweite Term jedenfalls in Betracht. Sobald aber ε nur ein beträchtliches Vielfaches von $\frac{1}{2N+1}$ geworden ist, verschwindet umgekehrt der zweite Term gegen den ersten. Da sich nun herausstellen wird, daß auch dann die Struktur des Beugungsbildes sich nur um Beträge geändert hat, die kaum meßbar sein dürften, wenn N nur einigermaßen groß ist ($= 10^4$ oder 10^5), wollen wir uns die etwas mühsame Diskussion in dem Zwischengebiet von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = \frac{40 \text{ bis } 50}{2N+1}$ ersparen.

Wenn ε mindestens diesen Betrag hat, verschwindet die Potenz $e^{-(2N+1)\varepsilon}$ gegen 1 und wir können den zweiten Term spalten in den echten Bruch

$$\frac{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\varepsilon}{2}} - e^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\varepsilon}{2}} - e^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2 + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} \cdot (e^{\varepsilon} + e^{-\varepsilon})\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

und einen zweiten Bruch, dessen Nenner derselbe ist, wie der des ersten Terms, und dessen Zähler gleich 1 ist. Der Zähler des ersten Terms ist aber mindestens von der Größenordnung $\varepsilon(2N+1)$, der erste Term übertrifft also den zweiten mindestens um das 40—50fache, nach unserer Annahme. Wir haben also jetzt nur mehr mit der einfacheren Formel

$$J_m = \frac{\frac{1}{2}(e^{\varepsilon} - e^{-\varepsilon})(2N+1)}{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\varepsilon}{2}} - e^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2 + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (32)$$

zu tun.

Untersuchen wir nun die Struktur des Beugungsbildes in der Nähe eines sekundären Maximums[1]), wie es, abgesehen von der Wärmebewegung, nach (31) an den Stellen

$$\alpha = 2n\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2 \ldots$$

auftritt. Wenn wir uns auf die nächste Umgebung eines solchen Maximums beschränken, können wir ε als konstant ansehen. Wir setzen ferner in der Umgebung von $\alpha = 2n\pi$

$$\alpha = 2n\pi + \varepsilon z. \qquad (33)$$

Dann ist z der Zuwachs des Beugungskosinus $\cos\vartheta$, und zwar in solchem Maß gemessen, daß $z = 1$ einen Zuwachs um den Bruchteil $\frac{\varepsilon}{2\pi}$ des Abstands zweier benachbarter Maxima (ebenfalls im „Kosinusmaß" gemessen) bedeutet. Sei zunächst ε immer noch klein gegen 1. Dann können wir in (32) die Potenzen und den Sinus entwickeln und beim ersten Glied abbrechen:

$$J_m = 2\frac{2N+1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{1+z^2}. \qquad (34)$$

Die Funktion $\frac{1}{1+z^2}$ bestimmt also den Verlauf der Intensität innerhalb eines Beugungsbildes. Sie ist in Fig. 2 dargestellt.

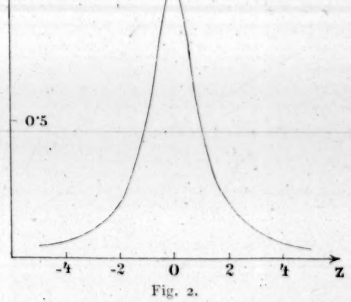


Fig. 2.

Für einen bestimmten Wert von z beträgt die Intensität einen ganz bestimmten Bruchteil der zentralen Intensität, z. B. für $z = 1$ genau die Hälfte, für $z = 3$ ein Zehntel. Einem bestimmten z entspricht aber nach (33) eine um so größere Entfernung vom zentralen Maximum, je größer ε, d. h. je höher die Temperatur. Definieren

1) Im primären Maximum verschwindet ε nach (27) mit $\cos\vartheta$. Dies hängt, wie überhaupt die Art der Abhängigkeit des ε vom Beugungswinkel ϑ damit zusammen, daß wir die Wärmebewegung der Atome auf die x-Achse beschränkt haben. Wir dürfen also auf diese Abhängigkeit für die physikalische Anwendung kein besonderes Gewicht legen.

wir also als die Ränder des Beugungsbildes zwei Stellen, wo die Intensität auf einen bestimmten Bruchteil, etwa auf 1 Proz. der zentralen Intensität, gesunken ist, so können wir sagen:

1. Die Beugungsbilder werden mit zunehmender Temperatur immer breiter und verschwommener, und zwar in annähernd symmetrischer Weise. Ihre in der angegebenen Weise definierte Breite ist der absoluten Temperatur proportional.

Der Koeffizient der quasielastischen Kraft f ist dabei als unabhängig von der Temperatur angesehen. Ferner

2. Die zentrale Intensität eines Beugungsbildes ist nach (34) umgekehrt proportional mit ε, also umgekehrt proportional der absoluten Temperatur.

3. Die gesamte Strahlungsmenge, die einem Beugungsbild zugesandt wird, ist unabhängig von der Temperatur.

Denn die zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ ausgesandte Strahlung ist proportional mit $J_m d\vartheta$ und wir haben nach (27[1]) und (33)

$$|d\vartheta| = \frac{1}{\varkappa a \sin\vartheta} d\alpha = \frac{\varepsilon}{\varkappa a \sin\vartheta} dz,$$

also nach (34)

$$\int J_m d\vartheta = \frac{2(2N+1)}{\varkappa a \sin\vartheta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2}.$$

Da es sich nur um die nächste Umgebung eines Bildes handelt, kann $\sin\vartheta$ bei der Integration als konstant gelten. Wir dürfen dieselbe aber trotzdem von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken, da die großen z ohnedies verschwindende Beiträge liefern. Wir erhalten also für die gesamte Lichtmenge in einem Beugungsbild

$$\int J_m d\vartheta = \frac{2\pi(2N+1)}{\varkappa a \sin\vartheta} \qquad (35)$$

und dies ist unabhängig von ε. —

Wir haben nun noch den Beweis nachzutragen, daß für die kleinsten Werte von ε, welche wir betrachtet haben, etwa für $\varepsilon = \frac{50}{2N+1}$, die Beugungsbilder praktisch noch vollkommen scharf sind. Der Abstand von der Bildmitte beträgt in Bruchteilen des Abstands zweier benachbarter Bilder

$$\frac{\varepsilon z}{2\pi} = \frac{50 z}{2\pi(2N+1)}.$$

Nun ist schon für $z = 10$ die Intensität nach (34) auf weniger als 1 Proz. gesunken. Das Beugungsbild wird also praktisch gewiß nicht breiter erscheinen als

$$\frac{2 \times 50 \times 10}{2\pi(2N+1)} \times \left\{\begin{matrix}\text{Bilder-}\\\text{abstand}\end{matrix}\right| = \frac{159}{2N+1} \times \left\{\begin{matrix}\text{Bilder-}\\\text{abstand.}\end{matrix}\right.$$

Wenn N nur eine halbwegs große Zahl ist (etwa gleich 10^4 oder 10^5), dürfte diese Verbreiterung wohl noch nicht wahrnehmbar sein. Übrigens sei ausdrücklich hervorgehoben, daß für einen numerisch bestimmten Wert von ε der Grad der Verwaschenheit der Beugungsbilder, soweit er von der Wärmebewegung herrührt, unabhängig ist von der Zahl der Gitterpunkte. Nur bedeutet eben die untere Grenze $\left(\varepsilon = \frac{50}{2N+1}\right)$, von der ab sich die Diskussion der Formel (30) so sehr vereinfacht, einen um so größeren Wert von ε, je kleiner die Zahl der Gitterpunkte. Sollte diese wirklich beträchtlich kleiner sein als wir annehmen, dann müßte eben auch der zweite Term von (30) der Diskussion unterzogen werden. Wir würden aber für denselben numerischen Wert von ε auch ungefähr denselben Grad von Unschärfe finden, wie jetzt, vorausgesetzt, daß N nicht so klein ist, daß schon die Beugungsbilder des ruhenden Gitters merklich verwaschen sind. —

Wenn ε mit der Einheit vergleichbar wird, dürfen wir in (32) nicht mehr e^{ε} durch $1+\varepsilon$ annähern, und man überzeugt sich leicht, daß die Ausdehnung der Beugungsbilder dann schon so groß wird, daß auch die Ersetzung von $\sin\frac{\alpha}{2}$ durch das Argument nicht mehr gestattet ist. Ferner müßten wir innerhalb eines solchen breiten verwaschenen Streifens auch die Abhängigkeit der Größe ε vom Beugungswinkel in Betracht ziehen. Wir wollen aber diesen Vorgang des vollständigen Verschwimmens der Bilder schon aus dem Grunde nicht näher verfolgen, weil eben die Art dieser Abhängigkeit in unserem vereinfachten eindimensionalen Problem gewiß nicht den Tatsachen entspricht, da sie lediglich davon herrührt, daß wir die Wärmebewegung auf die x-Achse beschränkt haben; wir wissen aber aus den oben zitierten Arbeiten des Herrn Debye, daß beim dreidimensionalen Gitter ein ganz anderer Richtungseffekt auftritt, welcher der verschiedenen Phase der Anregung in der Fortpflanzungsrichtung der primären Welle sein Entstehen verdankt.

Wir wollen nur noch anmerken, daß für große Werte von ε unser Resultat wieder mit dem Debyeschen zusammenkommt. Wenn ε ein erhebliches Vielfaches der Einheit ist, so erhalten wir aus (32)

$$J_m = 2N+1,$$

also eine gleichmäßige Erhellung von beträchtlich geringerer Intensität als die ursprüngliche in den ungestörten Maximis $[(2N+1)^2]$.

Die Diskussion der wirklich auftretenden

numerischen Werte von ε verschiebe ich bis zur Behandlung des dreidimensionalen Problems. Statt des Koeffizienten f der quasielastischen Kraft, der hier nach (27[2]) die Größe des Temperatureffekts mitbestimmt, werden dann die makroskopisch beobachtbaren Elastizitätsmoduln des Kristalls eingeführt werden können und eine genauere Durchrechnung einzelner Fälle ermöglichen.

Es kann aber wohl keinem Zweifel unterliegen, daß die bis jetzt aufgestellten Gesetze auch für den dreidimensionalen Fall Geltung haben werden, freilich nur für genügend hohe Temperaturen, da wir die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Konfiguration nach den Gesetzen der statistischen Mechanik ohne Rücksicht auf die Quantentheorie berechnet haben. Wir fassen unser vorläufiges Resultat zusammen:

Die mit Kristallgittern von Röntgenstrahlen erhaltenen Beugungsbilder müssen mit wachsender Temperatur immer breiter und verschwommener werden und allmählich in eine gleichmäßige Erhellung des Gesichtsfeldes übergehen.

Wien, 27. November 1913, II. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 28. November 1913.)

Über die Magnetisierung von ferromagnetischen Körpern in Beziehung zur Annahme einer Nullpunktsenergie.

(Over de magnetisatie van ferromagnetische lichamen in verband met de aanname eener nulpuntsenergie.)

Von W. H. Keesom.

II[1]). Über die Suszeptibilität im erregt-ferromagnetischen Zustand.

§ 5[2]). Die Suszeptibilität von ferromagnetischen Stoffen oberhalb ihres Curiepunktes. Nach der Weissschen Theorie gehen die ferromagnetischen Stoffe oberhalb ihres Curiepunktes, bevor sie eventuell den paramagnetischen Zustand annehmen, in einen Zustand (eventuell in verschiedene Zustände) über, in welchem, wie unterhalb des Curiepunktes, die Magnetisierung ein Molekularfeld hervorruft. Dann tritt jedoch keine spontane Magnetisierung mehr auf, und das Molekularfeld entsteht nur dann, wenn es von einem äußeren Felde erregt wird. Wir nehmen in diesem Paragraphen an, daß Gleichung (1 $\frac{3}{5}$) für die Existenz eines Curiepunktes erfüllt ist. Für Zustände, in denen noch keine Sättigung merkbar zu werden anfängt[1]), folgt aus Gleichung (7), die dann in $M_m = {}^1/_2\, n\mu a$ übergeht, mit (8), (10), (11) und (16) für die spezifische Suszeptibilität (pro Masseneinheit)

$$\chi = \frac{n\mu}{3\,(u_r - u_{rc})_a}, \qquad (27)$$

also

$$\chi^{-1} \backsim (u_r - u_{rc}). \qquad (28)$$

In erster Annäherung, d. h. bei Äquipartition, wie in zweiter Annäherung, wenn in der Entwicklung des zweiten Gliedes der ersten Gleichung von (5) nach positiven Potenzen von x nur die zwei ersten Glieder in Betracht kommen[2]), geht (28) über in das Gesetz von Weiss für die Suszeptibilität oberhalb des Curiepunktes:

$$\chi^{-1} \backsim T - T_c. \qquad (29)$$

In Figur 2 ist veranschaulicht, wie die Kurve, die χ^{-1} als Funktion der Temperatur darstellt, sich aus u_r als Funktion von T ergibt. Darin ist nach (5) $\Delta = \frac{2}{15}\Theta_0$.

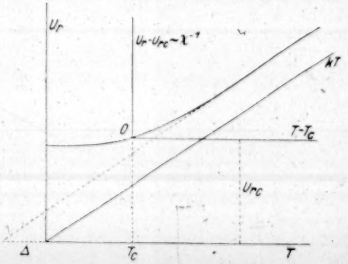


Fig. 2.

Für genügend hohe Temperaturen ist sie als Gerade zu betrachten. Die Annahmen des vorigen Abschnittes ergeben jedoch, daß in der Nähe von Θ χ^{-1} als Funktion von T, je nach dem Verhältnis von T_c zu Θ_0, mehr oder weniger gekrümmt ist. Merkbar ist diese Krümmung nur zu erwarten bei hohen Werten von Θ_0, wie bei den einatomigen ferromagnetischen Elementen.

Tatsächlich deuten nun die Bestimmungen von Weiss und Foex[3]) über Nickel, Eisen[4]) und Kobalt auf einen Verlauf von χ^{-1}, wie er in Figur 2 angegeben wird. Zwar stellen Weiss

1) Übersetzt nach Leiden, Commun. Suppl. Nr. 32b.

2) Die Paragraphen, Gleichungen und Figuren sind numeriert in Fortsetzung des ersten Abschnittes dieser Arbeit (diese Zeitschr. 15, 8, 1914).

1) Für diese Zustände kommt die in § 3b erörterte Änderung von u_r durch das Auftreten des Feldes nicht in Betracht.

2) Für $T > 1{,}2\,\Theta_0$ ist dieses der Fall mit einer Genauigkeit von 1 % für u_r und mit einer von 1 ‰ für $T > 4\,\Theta_0$.

3) P. Weiss und G. Foex, Arch. de Genève (4) 31, 89, 1911.

4) Vgl. für diesen Stoff jedoch A. Preuss, Diss. Zürich (Techn. Hochschule) 1912, S. 64.

und Foex χ^{-1}, wenigstens für ein bestimmtes Temperaturgebiet oberhalb des Curiepunktes, in Annäherung durch zwei Geraden dar, bemerken jedoch ausdrücklich, daß für Nickel z. B.[1]) die Neigung des Teiles der Kurve, der am dichtesten an O grenzt, keinen bestimmten Wert hat. Diesem entspricht, daß Honda und Takagi[2]) die χ^{-1},T-Kurve für Nickel zwischen reichlich 400° C und 550° C schwach gekrümmt finden. Weiter schließt nach Honda und Takagi dieser Teil sich ohne Knick dem nahezu geraden Teil für höhere Temperaturen an. Außer dem Punkte bei der höchsten Temperatur hat die durch sie in Figur 1 Tafel I l. c. für Nickel[3]) gezeichnete χ^{-1},T-Kurve ganz die Form, wie sie nach Figur 2 zu erwarten sein würde[4]).

§ 6. Die Möglichkeit des Bestehens ferromagnetischer Stoffe ohne Curiepunkt. In § 3a wurde bereits darauf hingewiesen, daß bei Annahme einer Nullpunktsenergie für die Molekularrotationen die Existenz ferromagnetischer Stoffe (Stoffe mit einem Molekularfeld), die keine spezifischen ferromagnetischen Eigenschaften zeigen, als möglich erachtet werden muß. Man wird solche Stoffe an erster Stelle unter denen zu suchen haben, die eine große Nullpunktsenergie der Rotation (kleines Trägheitsmoment), ein kleines magnetisches Molekularmoment, sowie ein schwaches Molekularfeld besitzen.

Aus (7) ergibt sich für Zustände, bei denen noch keine Sättigung merkbar zu werden beginnt, nach (8), (10) und (11) für die Suszeptibilität

$$\chi^{-1} \sim u_r - v, \quad \text{wenn} \quad v = \frac{N_m n_0 \mu^2}{3} \tag{30}$$

ist.

In Fig. 3 sind die verschiedenen Fälle vereinigt, die bei verschiedenen Werten der Konstanten v, verglichen mit u_{r_0}, möglich sind.

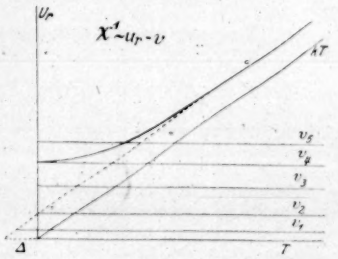


Fig. 3.

Dabei ist χ^{-1} für die verschiedenen Werte von v von der entsprechenden horizontalen Geraden aus zu messen. Denkt man bei konstant gehaltenem magnetischen Molekularmoment und konstant gehaltener Nullpunktsenergie das Molekularfeld von o ab zunehmend, dann bekommt man der Reihe nach die folgenden Fälle:

$v = v_1$. Bei genügend hohen Temperaturen ist $\chi(T + \Delta_1) = \text{konst.}$ (mit positivem Δ_1). Man würde diese Klasse von Stoffen quasi-paramagnetische nennen können: Die Anwesenheit des Molekularfeldes äußert sich, was die Suszeptibilität betrifft, nur darin, daß diese Stoffe vom Gesetz der korrespondierenden Zustände abweichen, das nach der von Kamerlingh Onnes und Perrier[1]) ausgesprochenen und von Oosterhuis[2]) bei seinen Betrachtungen als zutreffend gefundenen Vermutung für rein paramagnetische Stoffe (ohne Molekularfeld) mit konstantem magnetischen Moment gilt.

$v = v_2$. Der Stoff folgt über ein großes Temperaturgebiet dem Curieschen Gesetz ($\Delta_2 = 0$). Bei tiefen Temperaturen ist die χ^{-1}, T-Kurve gekrümmt, ohne daß ein Gebiet mit einem bestimmten Δ[2]) aufzuweisen ist.

$v = v_3$. Zustand von erregtem Ferromagnetismus, charakterisiert durch einen positiven Wert von Δ_3, in $\chi(T - \Delta_3) = \text{konst.}$ für genügend hohe Temperatur. Der Stoff besitzt jedoch keinen Curiepunkt.

1) Siehe S. 95 l. c., für Eisen S. 97, siehe auch besonders für Kobalt S. 101.

2) Kotaro Honda und Hiromu Takagi, Science Reports Tohoku University Sendai (1) 1, 229, 1913.

3) Etwas Derartiges finden sie für Kobalt und Eisen.

4) Die Beobachtungen von Weiss und Foex über die Suszeptibilität von Nickel oberhalb des Curiepunktes können bis zu 870° C mit dem Werte $\Theta_0 = 2100$ von § 4 und dem magnetischen Moment des Grammatoms = 8552 genügend dargestellt werden. Letzterer Wert unterscheidet sich von dem in § 4 für den Zustand unterhalb des Curiepunktes hergeleiteten. Auf Grund vorläufiger Rechnungen erscheint es mir wahrscheinlich, daß für Nickel sowohl die spontane Magnetisierung unterhalb des Curiepunktes als auch die Suszeptibilität im erregtferromagnetischen Zustand oberhalb des Curiepunktes bis an die obenerwähnte Temperatur, nach den Messungen von Bloch, Diss. Zürich 1912, Techn. Hochschule, vermutlich sogar bis 1200° C, durch einen Wert von Θ_0 und einen Wert des magnetischen Moments pro Atom wie auch durch einen Wert des Koeffizienten des Molekularfeldes dargestellt werden können. In einer späteren Mitteilung hoffe ich die Resultate weiterer Rechnungen hinsichtlich dieses Punktes mitzuteilen. Wenn diese zu einer Erhärtung der geäußerten Vermutung führen, dann wird damit die Bedeutung der Theorie des Weissschen Molekularfeldes (erweitert durch die in dieser Mitteilung gemachten Voraussetzungen hinsichtlich des Wärmegleichgewichts der Molekularrotationen) noch besonders erhöht.

1) H. Kamerlingh Onnes und A. Perrier, Leiden Comm. Nr. 124a (Dez. 1911), § 3; vgl. E. Oosterhuis, diese Zeitschr. **14**, 867, 1913, Fußnote 4.

2) E. Oosterhuis, diese Zeitschr. **14**, 862, 1913.

3) Vgl. E. Oosterhuis, a. a. O.

$v = v_4$. Gleichfalls kein Curiepunkt. Sieht man von Sättigungserscheinungen ab, so würde χ bei Annäherung an $T = 0$ stets größer werden. Bei einem derartigen Stoff oder einem, der sich hiervon wenig unterscheidet (v wenig kleiner als v_4), würde man zuerst das Auftreten von Sättigungserscheinungen bei tiefen Temperaturen erwarten.

$v = v_5$. Ferromagnetischer Stoff mit Curiepunkt.

§ 7. Zunahme des magnetischen Molekularmomentes mit der Temperatur. In den Betrachtungen dieser Mitteilung ist stets das magnetische Molekularmoment als konstant angenommen. Weiter ist bei diesen Betrachtungen stets angenommen, daß die magnetische Achse eine feste Achse im magnetischen Molekül sei. Die einfachste Voraussetzung hierüber ist wohl, daß das Elektron oder die Elektronen, deren Bewegung (z. B. in einer kreisförmigen Bahn) das magnetische Moment verursacht, im Molekül an einen festen Ort gebunden sind. Man kommt so zu der Vorstellung, daß ein magnetisches Molekül sein magnetisches Moment dem Umstande verdankt, daß es sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit um seine Achse dreht, die dann die magnetische Achse ist, während es ein oder mehr Elektronen trägt, die außerhalb der Achse gelegen sind. Solange die Rotationsgeschwindigkeit konstant ist und die erwähnten Elektronen denselben Abstand zur Achse behalten, ist das magnetische Moment konstant. Es liegt nun auf der Hand, zu fragen, ob vielleicht nicht diese Rotation (um die magnetische Achse) auch am molekularen Wärmegleichgewicht teilnimmt. Daß die Rotationsgeschwindigkeit sich von den tiefen Temperaturen aus über ein großes Temperaturgebiet nicht merklich ändert, würde dann auf einen großen Wert des sich auf diese Rotation beziehenden θ_0 deuten und würde einem besonders kleinen Trägheitsmoment um die betreffende Achse zuzuschreiben sein.

Kurz zusammenfassend würde ein magnetisches Molekül also ein Molekül (oder der Teil eines Moleküls) mit einem kleinen Trägheitsmoment um eine bestimmte Achse sein, so daß es mit Nullpunktsenergie mit großer Geschwindigkeit um diese Achse rotiert, und mit wenigstens einem Elektron, das an einen außerhalb der Achse gelegenen Ort im Molekül gebunden ist.

Nach dieser Auffassung bezüglich der Teilnahme der hier besprochenen Rotation am Wärmegleichgewicht wird bei höheren Temperaturen das magnetische Moment anfangen, erst langsam, dann schneller mit der Temperatur zuzunehmen. Tatsächlich ist Weiss[1]) auf Grund der Beobachtungen, z. B. für Magnetit, oberhalb des Curiepunktes, zur Vorstellung eines mit der Temperatur anwachsenden magnetischen Momentes gekommen. Ein Unterschied gegen die Weisssche Vorstellung besteht darin, daß Weiss eine sprungweise Zunahme des magnetischen Molekularmomentes nach rationellen Verhältnissen annimmt, während die obenerwähnte Auffassung mehr ein gleichmäßiges Anwachsen des magnetischen Molekularmomentes mit der Temperatur erwarten lassen würde. Eine nähere Untersuchung wird lehren müssen, ob die betreffenden Messungsergebnisse von Weiss und Foex auch nicht auf diese Weise, im besonderen unter Anwendung der Entwicklungen des § 3a für diese Rotationsenergie, dargestellt werden können.

Bedenkt man, daß wahrscheinlich bei anderen Stoffen die Trägheitsmomente um verschiedene Achsen sich nicht in dem Maße unterscheiden, wie dieses bei ferromagnetischen Stoffen der Fall zu sein scheint, und daß sich bei verschiedenen Verhältnissen der betreffenden Trägheitsmomente auch für paramagnetische Stoffe sehr verschiedene Fälle werden ergeben können; fügt man weiter die Möglichkeit hinzu, daß man es nach § 6 mit Stoffen zu tun haben kann, die wohl ein Magnetfeld, jedoch keinen Curiepunkt besitzen, so erscheint die Möglichkeit gegeben, noch verschiedene Fälle, die von Du Bois, Honda und Owen[2]) bei ihren Messungen über die Suszeptibilität von Elementen gefunden worden sind, und die nicht nach Oosterhuis mit der Annahme eines magnetischen Momentes ohne Molekularfeld vorgestellt werden können, zu interpretieren.

1) P. Weiss, Arch. de Genève (4) **31**, 402, 1911, § 12.

2) H. du Bois und K. Honda, Amst. Proc. Jan. 1910, S. 547; K. Honda, Ann. d. Phys. (4) **32**, 1027, 1910; Science Reports Tôhoku University Sendai **1**, 1, 1912; M. Owen, Amst. Proc. Dez. 1911, S. 637; Ann. d. Phys. (4) **37**, 657, 1912.

(Eingegangen 13. November 1913.)

Beitrag zur Theorie und Berechnung der optischen Elektronen und Ionen.

Von K. Kilchling.

Die Dispersion durchsichtiger Medien kann bekanntlich durch die Sellmeiersche Beziehung

$$n^2 = 1 + \sum \frac{D_m \lambda_m^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2} \qquad (1)$$

dargestellt werden. λ_m ist die Wellenlänge der Eigenschwingung, bezeichnet also etwa das Maximum des Absorptionsgebiets. D_m ist kon-

stant und kann aus den experimentellen Daten der Dispersion berechnet werden. Das Summenzeichen erstreckt sich über so viele Glieder, als die Substanz Absorptionsgebiete hat. Zu jedem Absorptionsgebiet gehört ein λ_m und ein D_m. Im Ultraroten werden diese Konstanten nach allgemeinem Gebrauch statt mit m mit dem Index r, im Ultraviolett mit v versehen.

Durch Reihenentwicklung ergibt sich

$$n^2 = n_\infty^2 + \sum \frac{D_m \lambda_m^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2} = n_\infty^2 + \sum \frac{M_m}{\lambda^2 - \lambda_m^2}. \quad (2)$$

Es ist darin

$$n_\infty^2 = 1 + \Sigma D_m \quad (3)$$

und

$$M_m = D_m \cdot \lambda_m^2. \quad (4)$$

n_∞^2 ist gleich der Dielektrizitätskonstanten der betreffenden Substanz.

R. Reiff[1]) gab auf Grund der Helmholtzschen Dispersionstheorie die erste Methode zur Berechnung von $\frac{e}{m}$, der spezifischen Ladung der die Absorption und Dispersion verursachenden optischen Elektronen des Moleküls. Ist die Zahl der Elektronen pro Molekül p, so kann $p \cdot \frac{e}{m}$ berechnet werden.

Die Reiffsche Theorie wurde von Drude[2]) ausgebaut.

Er fand

$$p \cdot \frac{e}{m} = \frac{\pi}{9660} \cdot \frac{M}{d} \cdot \frac{M_m}{\lambda_m^4}. \quad (5)$$

M ist das Molekulargewicht der betreffenden Substanz, d ihre Dichte.

Drude hat diese Beziehung auf eine Reihe von Stoffen angewandt, deren Dispersionskonstanten D_m, M_m, λ_m von Ketteler, Nichols, Paschen und Rubens gegeben waren. Merkwürdigerweise hat er die Berechnungen von Martens[3]), durch welche die von den vorerwähnten Autoren gefundenen Konstanten zum Teil berichtigt wurden, nicht berücksichtigt.

In der vorliegenden Arbeit sind die Daten von Martens zur Berechnung der $p \cdot \frac{e}{m}$ einer Anzahl Substanzen verwandt; die Drudeschen Werte von $p \cdot \frac{e}{m}$ sind jeweils zum Vergleich beigefügt.

H. A. Lorentz[4]) zeigte, daß die selektive Absorption im Ultravioletten durch Eigenschwingungen des negativen Elektrons verursacht ist, indem er nachwies, daß $\frac{e}{m}$ nahe $\frac{e}{m}$ für das negative Elektron ist. Über den Unterschied des optischen $\frac{e}{m}$ gegen den aus elektrischen und magnetischen Messungen gefundenen Wert ist in der von J. Koenigsberger und mir[1]) veröffentlichten Arbeit ein Erklärungsversuch gegeben.

Drude wies nach, daß p eine einfache Zahl und von der Größenordnung der im Molekül vorhandenen Valenzen ist. Seine Berechnungen ergaben ferner, daß die Absorption im Ultraroten durch Ionen verursacht ist.

Während Drude alle Berechnungen von $p \cdot \frac{e}{m}$ auf Dispersionsdaten stützte, haben J. Koenigsberger[2]) und ich eine Rechnungsmethode angewandt, welche gestattet, $p \cdot \frac{e}{m}$ direkt aus Absorptionsmessungen zu berechnen. Auch diese ist in der folgenden Arbeit angewandt worden.

I. Teil: Ultraviolett.

Flußspat. (Daten nach Martens.)

$\lambda_v = 0{,}095 \cdot 10^{-4}$
$D_v = 0{,}678$
$M = 78$
$d = 3{,}18$.

$$p \cdot \frac{e}{m} = 0{,}000325 \cdot \frac{78}{3{,}18} \cdot \frac{0{,}678}{0{,}00902 \cdot 10^{-8}} = \underline{6 \cdot 10^7}.$$

Drude (nach Paschen): $\underline{p \cdot \frac{e}{m} = 6{,}2 \cdot 10^7}$.

Ist $p = 4$ die Valenzsumme, so ist $\frac{e}{m} = 1{,}5 \cdot 10^7$, d. h. die Absorption ist durch die Resonanz von 4 Elektronen pro Molekül verursacht.

Steinsalz. (Daten nach Martens.)

$\lambda_{v1} = 0{,}111 \cdot 10^{-4}$ (berechnet)
$\lambda_{v2} = 0{,}156 \cdot 10^{-4}$ („)
$D_{v1} = 0{,}855$
$D_{v2} = 0{,}318$.

I. $\underline{p \cdot \frac{e}{m} = 6{,}2 \cdot 10^7}$.

II. $\underline{p \cdot \frac{e}{m} = 1{,}16 \cdot 10^7}$.

Rubens und Nichols stellten die Dispersion nur mit einem Absorptionsgebiet im Ultra-

1) Wied. Ann. **55**, 83, 1895.
2) Ann. d. Phys. **14**, 677, 1904.
3) Ann. d. Phys. **6**, 603, 1901.
4) Versl. K. Ak. Wet. Amsterdam **6**, 506 u. 555, 1898.

1) Ann. d. Phys. **32**, 843, 1910.
2) Ann. d. Phys. **28**, 889, 1909; **32**, 843, 1910; K. Kilchling, Inaug.-Diss. Freiburg i. B. 1909.

violetten bei $\lambda_v = 0{,}127 \cdot 10^{-4}$ (berechnet) dar, und Drude berechnet hieraus:

$$p \cdot \frac{e}{m} = 6{,}28 \cdot 10^7.$$

Die Wellenlänge $0{,}127 \cdot 10^{-4}$ ist auf Grund der Martensschen Daten als ein Absorptionsschwerpunkt zwischen $0{,}111 \cdot 10^{-4}$ und $0{,}156 \cdot 10^{-4}$ aufzufassen.

Sylvin. (Martens.)

$\lambda_{v1} = 0{,}115 \cdot 10^{-4}$ (berechnet)
$\lambda_{v2} = 0{,}161 \cdot 10^{-4}$ („)
$D_{v1} = 0{,}672$
$D_{v2} = 0{,}244$.

I. $p \cdot \frac{e}{m} = 6{,}33 \cdot 10^7$

II. $p \cdot \frac{e}{m} = 1{,}18 \cdot 10^7$.

Drude (nach Rubens und Nichols):

$\lambda_v = 0{,}153 \cdot 10^{-4}$.

$p \cdot \frac{e}{m} = 3{,}4 \cdot 10^7$.

Quarz. (Martens in Winkelmann, Handbuch der Physik.)

$\lambda_v = 0{,}105 \cdot 10^{-4}$
$M_v = 0{,}0105 \cdot 10^{-8}$.

$p \cdot \frac{e}{m} = 6{,}4 \cdot 10^7$.

Drude (Rubens und Nichols):

$\lambda_v = 0{,}103 \cdot 10^{-4}$

$p \cdot \frac{e}{m} = 7 \cdot 10^7$.

Kalkspat hat nach Martens ein Absorptionsgebiet bei $0{,}106 \cdot 10^{-4}$. Die Konstanten der Dispersionsformel konnten nicht berechnet werden, da die Zugehörigkeit der experimentell bekannten Absorptionsstreifen im Ultrarot zum ordentlichen oder außerordentlichen Strahl nicht entschieden war.

II. Teil: Ultrarot.

Wie Drude l. c. gezeigt hat, sind Absorptionsstreifen im Ultrarot Ionen zuzuschreiben. J. J. Thomson[1]) hat für zwei ponderable Massen m_1 und m_2, die entgegengesetzt gleiche elektrische Ladungen E haben und gegeneinander schwingen, Bewegungsgleichungen aufgestellt, aus denen sich die Dispersionsformeln für durchsichtige Medien in der Sellmeierschen Gestalt ableiten lassen. Thomson hat in seinen Ausgangsgleichungen keine dämpfende Kraft berücksichtigt, so daß seine Dispersionsformeln die anomale Dispersion nicht darstellen.

1) Phil. Mag. (6) 7, 237, 1904; 11, 769, 1906.

Im folgenden sind nun die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung einer dämpfenden Kraft aufgestellt. Thomson hatte die Beziehungen:

$$m_1 \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = -\frac{4}{3}\pi\varrho E x_1 \qquad (6)$$

$$m_2 \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = +\frac{4}{3}\pi\varrho E x_2. \qquad (6a)$$

x_1 und x_2 sind die Ausweichungen der geladenen Massenteilchen m_1 und m_2 aus ihren Ruhelagen. Die quasielastischen Kräfte, welche die Teilchen in die Ruhelagen zurücktreiben, wären danach proportional den Ausweichungen x_1 und x_2. Da die quasielastische Kraft jedoch von der Masse m_1 zu der Masse m_2 wirkt, so hängt sie nicht von den Verschiebungen x_1 und x_2 ab, sondern von der relativen Verschiebung $x_1 - x_2$. Deshalb scheint es mir richtiger zu sein, den Gleichungen folgende Form zu geben:

$$m_1 \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = -\frac{4}{3}\pi\varrho E (x_1 - x_2) \qquad (7)$$

$$m_2 \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = +\frac{4}{3}\pi\varrho E (x_1 - x_2). \qquad (7a)$$

Die Kräfte, welche auf die Teilchen wirken, sind danach die erregende Kraft X', die aus der Verschiebung resultierende quasielastische Kraft und die dämpfende Kraft, welche, da sie reibungsähnlich gedacht werden kann, proportional der Geschwindigkeit $\frac{\partial x}{\partial t}$ anzusetzen ist; r ist ein Proportionalitätsfaktor der Reibung.

Danach heißen die Grundgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} &= \\ &= -X' \cdot E - \frac{4}{3}\pi\varrho E (x_1 - x_2) - r_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} \end{aligned}\right| \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} m_2 \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} &= \\ &= +X' \cdot E + \frac{4}{3}\pi\varrho E (x_1 - x_2) - r_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} \end{aligned}\right| \qquad (8a)$$

Setzt man in den Gleichungen (7) für E bzw. $+e_1$ und $-e_2$ und

$$x_1 = A_1 \cdot e^{2\pi i \mathfrak{p} t} \qquad (9)$$

$$x_2 = A_2 \cdot e^{2\pi i \mathfrak{p} t}, \qquad (9a)$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} \varrho = \frac{3\pi m_1}{e_1 \cdot (1 + a_1)} \cdot \mathfrak{p}_1^2 = \frac{3\pi m_2}{e_2 \cdot (1 + a_2)} \cdot \mathfrak{p}_2^2 = \\ = \frac{3\pi m_1 \cdot m_2}{E \cdot (m_1 + m_2)} \cdot \mathfrak{p}_m^2, \end{aligned}\right| \qquad (10)$$

wobei

$$a_1 = \frac{1}{a_2} = \frac{m_1}{m_2}. \qquad (11)$$

Die Eigenschwingungszahlen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ sind gleich und mit $\mathfrak{p}_m$ bezeichnet.

Die Amplituden x_1 und x_2 verhalten sich umgekehrt wie die ponderabeln Massen m_1 und m_2, so daß

$$-m_1 : m_2 = x_1 : x_2 = -a_1 = -\frac{1}{a_2}. \quad (12)$$

Nach Lorentz[1]) ist die Kraft des äußeren elektrischen Feldes des Lichtvektors X nicht identisch mit der erregenden Kraft X'. Vielmehr besteht die Beziehung:

$$X' = X + \frac{4}{3}\pi N E (x_2 - x_1), \quad (13)$$

wobei

$$X = \frac{4\pi N E}{\nu^2 - 1}(x_2 - x_1). \quad (14)$$

Darin ist ν der komplexe Brechungsexponent

$$\nu = n - i\varkappa', \quad (15)$$

N die Anzahl geladener Massenteilchen pro cm³. Aus den Beziehungen (12), (13) und (14) ergibt sich

$$X' = 4\pi N E x_{1,2}(1 + a_{2,1}) \cdot \left[\frac{1}{\nu^2 - 1} + \frac{1}{3}\right]. \quad (16)$$

Endlich sind alle Werte in die Gleichungen (8) einzusetzen. Man erhält schließlich aus jeder der beiden Gleichungen:

$$n^2 - \varkappa'^2 - 1 = \frac{g\lambda^2(\lambda^2 - \lambda_m'^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m'^2)^2 + g'^2\lambda^2} \quad (17)$$

$$2n\varkappa' = \frac{3 g_0 g_0' \lambda^3}{(\lambda^2 - \lambda_m'^2)^2 + g'^2\lambda^2}. \quad (18)$$

Dabei ist abkürzungsweise gesetzt

$$g_0 = \frac{NE}{\varrho} \quad (19)$$

$$g_0' = \tau \cdot \frac{\lambda_m^2}{2\pi c_0 m}. \quad (20)$$

Zwischen g_0, g_0', g, g' und λ_m' bestehen folgende Beziehungen:

$$g = \frac{3 g_0}{1 - g_0} \quad (21)$$

$$g' = \frac{g_0'}{1 - g_0} \quad (22)$$

$$\lambda_m'^2 = \frac{\lambda_m^2}{1 - g_0}. \quad (23)$$

λ_m' hat keine physikalische Bedeutung und ist nur eine rechnerische Größe.

Durch die Substitution

$$\alpha = \frac{\lambda_m'^2 - \lambda^2}{g\lambda^2} \quad (24)$$

$$\beta = \frac{g'}{g \cdot \lambda} \quad (25)$$

ist

$$n^2 = \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha)^2 + \beta^2} + (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha)}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (26)$$

1) l. c.

$$\varkappa'^2 = \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha)^2 + \beta^2} - (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha)}{2(\alpha^2 + \beta^2)}. \quad (27)$$

Die Beziehungen (17) bis (27) sind identisch mit den früher[1]) diskutierten.

Anwendung auf die Berechnung von $p \cdot \frac{e}{m}$.

Der Index m bezeichnet im folgenden alle zu dem Absorptionsgebiet bei λ_m gehörigen Konstanten. Ersetzt man in (10) die Schwingungszahl ν_m durch $\frac{c_0}{\lambda_m}$, so ist

$$\lambda_m^2 = \frac{3\pi m_m c_0^2}{\varrho_m E_m (1 + a_m)}. \quad (28)$$

Mit Beziehung (19)

$$g_0 = \frac{N_m \cdot E_m}{\varrho_m} \quad (29)$$

ist

$$\lambda_m^2 = \frac{3\pi m_m c_0^2 g_0}{N_m \cdot E_m^2 (1 + a_m)} \quad (30)$$

oder

$$N_m = \pi \cdot \frac{g_0}{\lambda_m^2} \cdot \frac{m_m}{E_m^2 (1 + a_m)} \cdot 3 c_0^2. \quad (31)$$

Nun ist nach Drude die Dichte

$$d = \frac{N_m}{p_m} \cdot H \cdot M$$

oder mit (31)

$$d = \frac{3\pi \cdot g_0 m_m H M}{p_m \cdot \lambda_m^2 E_m E_m (1 + a_m)} \quad (32)$$

Der Faktor c_0^2 fällt dadurch heraus, daß E_m in elektrostatischem statt in elektromagnetischem Maße gemessen wird. Aus (32) ist

$$p_m \cdot \frac{E_m}{m_m} = \pi \cdot \frac{H}{E_m} \cdot \frac{M}{d} \cdot \frac{3 g_0}{\lambda_m^2} \cdot \frac{1}{1 + a_m}. \quad (33)$$

Da aber

$$\frac{3 g_0}{\lambda_m^2} = \frac{3 g_0}{\lambda_m'^2 (1 - g_0)} = \frac{g}{\lambda_m'^2}, \quad (34)$$

so ist

$$p_m \cdot \frac{E_m}{m_m} = \pi \cdot \frac{H}{E_m} \cdot \frac{M}{d} \cdot \frac{g}{\lambda_m'^2} \cdot \frac{1}{1 + a_m}. \quad (35)$$

Ist die Ladung E_m gleich dem Elementarquantum e, so ist

$$p_m \cdot \frac{e}{m_m} = \frac{\pi}{9660} \cdot \frac{M}{d} \cdot \frac{g}{\lambda_m'^2} \cdot \frac{1}{1 + a_m}. \quad (36)$$

Diese Beziehung unterscheidet sich von der früher von J. Koenigsberger und mir gegebenen durch den Faktor $\frac{1}{1 + a_m}$.

In die von Drude angegebene Form 1 ginge a entsprechend ein, so daß

1) J. Koenigsberger u. K. Kilchling, Ann. d. Phys. **28**, 889, 1909; **32**, 843, 1910.

$$p\cdot\frac{e}{m}=\frac{\pi}{9660}\cdot\frac{M}{d}\cdot\frac{D_m}{\lambda_m^2}\cdot\frac{1}{1+a} \qquad (37)$$

wäre.

Martens hat in der erwähnten Arbeit auch für die ultraroten Absorptionsgebiete die Konstanten D_m und λ_m berechnet.

Im folgenden ist $p\frac{e}{m}$ zunächst ohne a berechnet, dann mit a.

Steinsalz.

$$D_r = 1{,}62$$
$$\lambda_r = 51{,}2\cdot10^{-4} \text{ (beob.)}$$
$$p\cdot\frac{e}{m} = 0{,}055\cdot10^4.$$

Unter der Annahme, daß Na und Cl gegeneinander schwingen, erhält man

$$\text{für } Na\text{: } a_1=\frac{23}{35{,}46}=0{,}65,$$
$$\text{für } Cl\text{: } a_2=\frac{1}{a_1}=\frac{35{,}46}{23}=1{,}54$$
$$p\frac{e}{m}(Na)=\frac{0{,}055\cdot10^4}{1{,}65}=0{,}0333\cdot10^4$$
$$p\frac{e}{m}(Cl)=\frac{0{,}055}{2{,}54}\cdot10^4=0{,}0216\cdot10^4;$$

da für Wasserstoff $\frac{e}{m}=0{,}966\cdot10^4$ ist, so müßte sich für Na der 23., für Cl der 35,46. Teil hiervon ergeben, also

$$p\cdot\frac{e}{m}(Na)=\frac{0{,}966}{23}\cdot10^4=0{,}042\cdot10^4$$
$$p\cdot\frac{e}{m}(Cl)=\frac{0{,}966}{35{,}46}\cdot10^4=0{,}0272\cdot10^4.$$

Sylvin.

$$D_r = 1{,}93$$
$$\lambda_r = 61\cdot10^{-4} \text{ (beob.)}$$
$$p\cdot\frac{e}{m} = 0{,}064\cdot10^4.$$

Annahme: Es schwinge K gegen Cl.

Für K: $a_1=\frac{39{,}1}{35{,}46}=1{,}1$

$$p\cdot\frac{e}{m}=\frac{0{,}064}{2{,}1}\cdot10^4=0{,}0305\cdot10^4$$

Für Cl: $a_2=\frac{35{,}46}{39{,}1}=0{,}91$

$$p\cdot\frac{e}{m}=\frac{0{,}064}{1{,}91}\cdot10^4=0{,}0335\cdot10^4,$$

statt elektrolytisch für K:

$0{,}966\cdot10^4 : 39{,}1 = 0{,}0247\cdot10^4$,

für Cl: $0{,}0272\cdot10^4$.

Flußspat.

$$D_{r_1} = 0{,}16$$
$$\lambda_{r_1} = 24\cdot10^{-4} \text{ (beob.)}$$
$$p\cdot\frac{e}{m} = 0{,}0222\cdot10^4$$

$$D_{r_2} = 0{,}194$$
$$\lambda_{r_2} = 31{,}6\cdot10^{-4} \text{ (beob.)}$$
$$p\cdot\frac{e}{m} = 0{,}0155\cdot10^4$$

$$D_{r_3} = 4{,}527$$
$$\lambda_{r_3} = 40{,}52\cdot10^{-4} \text{ (ber.)}$$
$$p\cdot\frac{e}{m} = 0{,}22\cdot10^4$$

Im folgenden ist versucht, zu entscheiden, welche ponderabeln Massen schwingen. Im Molekül ist offenbar keine andere Gruppierung der Massen möglich, als daß Ca und F_2 oder CaF und F gegeneinander schwingen.

Im ersten Fall ist für

$$Ca\text{: } a=\frac{40}{38}=1{,}05, \quad \text{für } F_2\text{: } a=\frac{38}{40}=0{,}95$$

$\lambda_{r_1}=24\cdot10^{-4}$ Ca: $p\cdot\frac{e}{m}=\frac{0{,}0222}{2{,}05}10^4=0{,}0108\cdot10^4$

F_2: $p\cdot\frac{e}{m}=\frac{0{,}0222}{1{,}95}10^4=0{,}0114\cdot10^4$

$\lambda_{r_2}=31{,}6\cdot10^{-4}$ Ca: $p\cdot\frac{e}{m}=\frac{0{,}0155}{2{,}05}10^4=0{,}00755\cdot10^4$

F_2: $p\cdot\frac{e}{m}=0{,}00795\cdot10^4$

$\lambda_{r_3}=40{,}52\cdot10^{-4}$ Ca: $p\cdot\frac{e}{m}=0{,}107\cdot10^4$

F_2: $p\cdot\frac{e}{m}=0{,}113\cdot10^4$.

Im zweiten Fall ist für

$$CaF\text{: } a=\frac{59}{19}=3{,}1 \qquad F\text{: } a=\frac{19}{59}=0{,}322$$

$\lambda_{r_1}=24\cdot10^{-4}$ CaF: $p\cdot\frac{e}{m}=0{,}0054\cdot10^4$

F: $=0{,}0168\cdot10^4$

$\lambda_{r_2}=31{,}6\cdot10^{-4}$ CaF: $=0{,}00378\cdot10^4$

F: $=0{,}0117\cdot10^4$

$\lambda_{r_3}=40\,52\cdot10^{-4}$ CaF: $=0{,}054\cdot10^4$

F: $=0{,}166\cdot10^4$.

Nun ist elektrolytisch für

$$Ca\text{: } \frac{e}{m}=\frac{0{,}966\cdot10^4}{40}\cdot2=0{,}0482\cdot10^4$$
$$F_2\text{: } \frac{e}{m}=\frac{0{,}966\cdot10^4}{38}\cdot2=0{,}0508\cdot10^4$$
$$CaF\text{: } \frac{e}{m}=\frac{0{,}966\cdot10^4}{59}=0{,}0164\cdot10^4$$
$$F\text{: } \frac{e}{m}=\frac{0{,}966\,10^4}{19}=0{,}0508\cdot10^4$$

Annahme I. Nimmt man an, daß die Schwingungen von Ca gegen F_2 die Absorption bei $\lambda_{r_1}=24\cdot10^{-4}$ erzeugen, so hätte das zur

Folge, daß unter vier bis fünf Molekülen von CaF_2 eins ist, in welchem Ca gegen F_2 schwingt. Es ist nämlich für Ca das Verhältnis des optischen Wertes $p \cdot \frac{e}{m}$ zu dem elektrolytischen

$$= 0{,}0108 : 0{,}0482 = 1 : 4{,}46,$$

und entsprechend für F_2

$$= 0{,}0114 : 0{,}0508 = 1 : 4{,}46.$$

Dann könnte man annehmen, daß unter vier bis fünf Molekülen CaF_2 eins ist, in welchem CaF gegen F schwingt und die Absorption bei $\lambda_{r_2} = 31{,}6 \cdot 10^{-4}$ verursacht. Denn das Verhältnis der spezifischen Ladungen ist für CaF

$$= 0{,}00378 : 0{,}0164 = 1 : 4{,}35$$

und für F

$$= 0{,}0117 : 0{,}0508 = 1 : 4{,}35.$$

Annahme II. Wenn aber die Absorption bei $\lambda_{r_1} = 24 \cdot 10^{-4}$ durch Schwingungen von CaF gegen F verursacht wird, so käme auf drei Moleküle CaF_2 eins, das derartigen Schwingungen fähig ist, weil das Verhältnis der spezifischen Ladungen für CaF

$$= 0{,}0054 : 0{,}0164 = 1 : 3{,}03,$$

für F

$$= 0{,}0168 : 0{,}0508 = 1 : 3{,}02$$

ist.

Die Absorption bei $\lambda_{r_2} = 31{,}6 \cdot 10^{-4}$ könnte in diesem Falle verursacht sein durch ein schwingungsfähiges Molekül mit Ca und F_2 als schwingenden Massen auf sechs bis sieben Moleküle. Für Ca ist nämlich

$$p \cdot \frac{e}{m} : \frac{e}{m} = 0{,}00755 : 0{,}0482 = 1 : 6{,}4,$$

für F_2

$$= 0{,}00795 : 0{,}0508 = 1 : 6{,}4.$$

Die Entscheidung darüber, welche der beiden Annahmen den Vorzug verdient, kann auf Grund der berechneten Daten nicht getroffen werden.

Die Absorption bei $\lambda_{r_3} = 40{,}52 \cdot 10^{-4}$ kann nicht durch Schwingungen von Ca gegen F_2 und nicht durch solche von CaF gegen F erzeugt sein, denn es würde sich in beiden Fällen eine größere Zahl von schwingenden Ca- und F_2- bzw. CaF- und F-Gruppen pro Molekül ergeben, als die Zahl der Moleküle selbst beträgt.

Quarz (nach Martens in Winkelmanns Handb. d. Phys., II. Aufl., Bd. 6).

$$M_{r_1} = 47{,}391 \cdot 10^{-8},$$
$$\lambda_{r_1} = 8{,}85 \cdot 10^{-4} \text{ (ber.)},$$
$$p \cdot \frac{e}{m} = 0{,}574 \cdot 10^{4},$$

$$M_{r_2} = 592{,}97 \cdot 10^{-8},$$
$$\lambda_{r_2} = 20{,}75 \cdot 10^{-4} \text{ (ber.)},$$
$$p \cdot \frac{e}{m} = 0{,}236 \cdot 10^{4}.$$

In diesem Falle ist möglich, daß Si gegen O_2 oder daß SiO gegen O schwingt.

Fall 1.

$$Si\text{: } a_1 = \frac{28{,}3}{32} = 0{,}88, \quad O_2\text{: } a_2 = \frac{32}{28{,}3} = 1{,}13.$$

Fall 2.

$$SiO\text{: } a_1 = \frac{44{,}3}{16} = 2{,}77, \quad O\text{: } a_2 = 0{,}361.$$

$\lambda_{r_1} = 8{,}85 \cdot 10^{-4}$, Si: $p \cdot \frac{e}{m} = 0{,}305 \cdot 10^{4}$,
O_2: $= 0{,}269 \cdot 10^{4}$,
$\lambda_{r_2} = 20{,}75 \cdot 10^{-4}$, Si: $= 0{,}125 \cdot 10^{4}$,
O_2: $= 0{,}111 \cdot 10^{4}$,
λ_{r_1}, SiO: $p \cdot \frac{e}{m} = 0{,}152 \cdot 10^{4}$,
O: $= 0{,}422 \cdot 10^{4}$,
λ_{r_2}, SiO: $= 0{,}0625 \cdot 10^{4}$,
O: $= 0{,}173 \cdot 10^{4}$.

Elektrolytisch ist $\frac{e}{m}$ für

Si:	$0{,}136 \cdot 10^{4}$	bei vier Ladungen,	
O_2:	$0{,}1204 \cdot 10^{4}$	„ „	„
SiO:	$0{,}0435 \cdot 10^{4}$	„ zwei	„
O:	$0{,}1204 \cdot 10^{4}$	„ „	„

Aus den Daten geht hervor, daß die Absorption bei $\lambda_{r_2} = 20{,}75 \cdot 10^{-4}$ durch Schwingungen von Si gegen O_2 in jedem Molekül verursacht ist. Die Übereinstimmung der optischen spezifischen Ladung mit der elektrolytischen ist eine gute. Si und O_2 haben je vier Ladungen.

Die Absorption bei $\lambda_{r_1} = 8{,}85 \cdot 10^{-4}$ ist aus den Zahlen nicht zu erklären, da sich ergeben würde, pro Molekül schwingen 3—4 (3,5) SiO gegen O oder 2—3 (2,4) Si gegen O_2; beides ist aber unmöglich.

Wasser.

Die Dispersionskonstanten des Wassers im Ultraroten konnten zum Teil nach den Absorptionsdaten von Aschkinass[1]) berechnet werden. Gegeben sind die Werte des Absorptionskoeffizienten ε, wobei ε definiert ist nach der Gleichung

$$D = \frac{I'}{I} = e^{-\varepsilon \cdot l}.$$

Um die Dispersionskonstanten und

$$\varepsilon = \frac{1}{l \cdot \log e} \cdot \log \frac{1}{D}$$

aus der Absorption nach dem früher[2]) gegebenen

1) Wied. Ann. **55**, 420, 1895.
2) Koenigsberger und K. Kilchling, Ann. d. Phys. **28**, 889, 1909 und **32**, 843, 1910.

Verfahren zu berechnen, sind die Werte $\varkappa'$ notwendig nach der Gleichung

$$D = \frac{I'}{I} = e^{-\frac{4\pi l \varkappa'}{\lambda}},$$

woraus

$$\varkappa' = \frac{\lambda}{4\pi \cdot l \cdot \log e} \cdot \log \frac{1}{D}$$

oder

$$\varkappa' = \frac{\lambda}{4\pi} \cdot \varepsilon.$$

Nach diesen Berechnungen hat Wasser je ein Absorptionsgebiet bei $\lambda_{r_1} = 3{,}09 \cdot 10^{-4}$ und $\lambda_{r_2} = 6{,}1 \cdot 10^{-4}$.

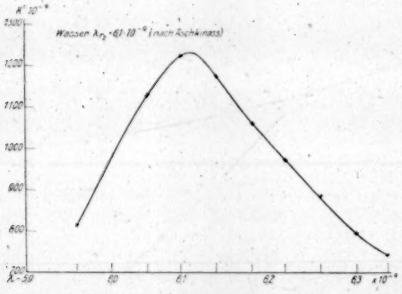


Fig. 1.

$\lambda_{r_2} = 6{,}100 \cdot 10^{-4}$,
$\lambda_{r_2}' = 6{,}100 \cdot 10^{-4} + 0{,}010 \cdot 10^{-4} = 6{,}110 \cdot 10^{-4}$.

Die früher (l. c.) beschriebenen Methoden zur Berechnung der Konstanten der Dispersion ergeben

I. nach längeren Wellen:

$$g = 0{,}0139,$$
$$g_0 = 0{,}00462,$$
$$g' = 0{,}346 \cdot 10^{-4},$$
$$g_0' = 0{,}344 \cdot 10^{-4};$$

II. nach kürzeren Wellen:

$$g = 0{,}0140,$$
$$g_0 = 0{,}0047,$$
$$g' = 0{,}347 \cdot 10^{-4},$$
$$g_0' = 0{,}345 \cdot 10^{-4};$$

$$p \cdot \frac{e}{m} = \frac{\pi}{9660} \cdot \frac{M}{d} \cdot \frac{g}{\lambda_m'^2} \qquad \lambda_m' = 6{,}11 \cdot 10^{-4},$$

$$= \frac{3{,}14}{9660} \cdot \frac{18}{1} \cdot \frac{0{,}014}{37{,}33 \cdot 10^{-8}},$$

$$p \cdot \frac{e}{m} = 0{,}022 \cdot 10^4.$$

Bei Wasser ist möglich, daß H_2 gegen O mit je zwei Ladungen oder OH gegen H mit je einer Ladung schwingen.

Im ersten Falle ist für H_2:

$$a = \frac{2}{16} = 0{,}125,$$

und für O:

$$a = \frac{16}{2} = 8.$$

$p \cdot \frac{e}{m}$ für H_2 ist damit

$$= 0{,}0195 \cdot 10^4,$$

für O:

$$= 0{,}00244 \cdot 10^4.$$

Im zweiten Fall ist für H:

$$a = \frac{1}{17} = 0{,}059,$$

für OH:

$$a = 17.$$

$p \cdot \frac{e}{m}$ für H:

$$= 0{,}0207 \cdot 10^4,$$

für OH:

$$= 0{,}0012 \cdot 10^4.$$

Für Wasserstoff ist elektrolytisch

$$\frac{e}{m} = 0{,}966 \cdot 10^4$$

und für H_2 desgleichen; $\frac{e}{m}$ für O ist elektrolytisch $= 0{,}1204 \cdot 10^4$, für $OH = 0{,}0568 \cdot 10^4$.

Im ersten Falle ist für H_2 und für O gleich

$$p \cdot \frac{e}{m} : \frac{e}{m} = 1 : 4{,}95;$$

im zweiten Falle für H und für OH gleich $1 : 4{,}66$.

Ist die Absorption bei $\lambda_{r_2} = 6{,}1 \cdot 10^{-4}$ durch Schwingungen von H_2 gegen O bedingt, so kommt auf fünf Moleküle ein schwingungsfähiges; ist sie aber durch Schwingungen von H gegen OH verursacht, so ist unter vier bis fünf Molekülen ein schwingungsfähiges. Eine Entscheidung, welche Annahme größere Wahrscheinlichkeit hat, ist nicht möglich.

Wasser hat noch ein zweites gemessenes Absorptionsgebiet bei $\lambda_{r_1} = 3{,}09 \cdot 10^{-4}$.

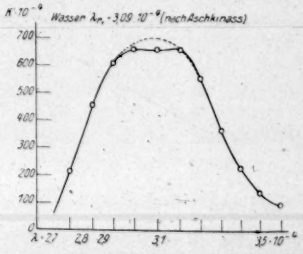


Fig. 2.

Die Kurve hat im Maximum eine Einsenkung. Um nun überhaupt rechnen zu können, mußte ich die Kurve plausibel korrigieren (gestrichelte Kurve im Maximum). Die Dispersionskonstanten sind nach der früheren Methode berechnet:

I. nach längeren Wellen

$$g = 0{,}0284,$$
$$g_0 = 0{,}0093,$$
$$g' = 0{,}657 \cdot 10^{-4};$$

II. nach kürzeren Wellen

$$g = 0{,}0607,$$
$$g_0 = 0{,}0198,$$
$$g' = 1{,}34 \cdot 10^{-4}.$$

Diese Konstanten wurden nun durch Rückwärtsrechnen geprüft, d. h. es wurden gemessene Werte $\varkappa'$ mit Hilfe der Planckschen Formel

$$\varkappa'^2 = \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-\alpha)^2+\beta^2}-(\alpha^2+\beta^2-\alpha)}{2(\alpha^2+\beta^2)}$$

berechnet und verglichen. Es zeigte sich, daß die Konstanten für die zugehörige Seite der Absorptionskurve annähernd richtige Werte $\varkappa'$ ergaben, dagegen ganz falsche auf der anderen Seite. Die Annahme von Mittelwerten für die Konstanten, genommen aus den berechneten Werten, konnte wohl die Übereinstimmung auf der einen Seite bessern, verschlechterte sie aber auf der anderen im selben Maße. Die Gestalt der Kurven hängt nun ab von dem Verhältnis $\frac{g'}{g}$, welches aus $\varkappa_m'$ und λ_m' berechnet wird. Gerade die Ablesungen $\varkappa_m'$ und λ_m' sind aber bei der vorliegenden Kurve unmöglich hinreichend genau zu machen, da die Korrektur zu willkürlich erscheint. Es ist außerdem möglich, daß das Maximum bei $3{,}09 \cdot 10^{-4}$ in Wirklichkeit sich aus zwei Absorptionsgebieten zusammensetzt, die zu beiden Seiten von $3{,}09 \cdot 10^{-4}$ liegen. Dies würde eine Verschiedenheit des Abfalls der Kurve und damit auch eine Verschiedenheit der Konstanten g, g_0 und g' zur Folge haben. Jedenfalls ist auf Grund des vorliegenden Materials eine genaue Berechnung nicht möglich.

Zusammenfassung.

1. Für eine Reihe von Substanzen wurde eine Neuberechnung von $p \cdot \frac{e}{m}$ im Ultravioletten auf Grund verbesserter Dispersionsdaten vorgenommen. Diese Substanzen sind: Flußspat, Steinsalz, Sylvin, Quarz.

2. Die Thomsonsche Dispersionstheorie wurde durch Zusatz von Dämpfungskräften auf das Gebiet anomaler Dispersion ausgedehnt und die Erweiterung auf die Berechnung von $p \cdot \frac{e}{m}$ im Ultraroten angewandt.

3. Für Steinsalz, Sylvin, Flußspat, Quarz wurde $p \cdot \frac{e}{m}$ aus Dispersionsdaten im Ultraroten berechnet, für Wasser aus der Absorptionskurve.

Es wurde versucht, festzustellen, was für Massen gegeneinander schwingend die Absorption verursachen.

Im ganzen hat sich gezeigt, daß es wünschenswert ist, durch genaue Messungen die Gestalt der Absorptionskurven so genau und weit als möglich zu bestimmen.

Die folgende Zusammenstellung soll unter anderem die auffällige Übereinstimmung der Werte $p \cdot \frac{e}{m}$ der mineralogisch dem gleichen System angehörigen Substanzen zeigen.

Ultraviolett			Ultrarot		
Substanz	λ_{max}	$p \cdot \frac{e}{m}$	Substanz	λ_{max}	$p \cdot \frac{e}{m}$
CaF_2	$0{,}095 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^7$	CaF_2	$24 \cdot 10^{-4}$	$0{,}0222 \cdot 10^4$
				$31{,}6 \cdot 10^{-4}$	$0{,}0155 \cdot 10^4$
				$40{,}52 \cdot 10^{-4}$	$0{,}22 \cdot 10^4$
$NaCl$	$0{,}110 \cdot 10^{-4}$	$6{,}2 \cdot 10^7$	$NaCl$	$51{,}2 \cdot 10^{-4}$	$0{,}055 \cdot 10^4$
	$0{,}156 \cdot 10^{-4}$	$1{,}16 \cdot 10^7$			
KCl	$0{,}115 \cdot 10^{-4}$	$6{,}33 \cdot 10^7$	KCl	$61 \cdot 10^{-4}$	$0{,}064 \cdot 10^4$
	$0{,}161 \cdot 10^{-4}$	$1{,}18 \cdot 10^7$			
SiO_2	$0{,}105 \cdot 10^{-4}$	$6{,}4 \cdot 10^7$	SiO_2	$8{,}85 \cdot 10^{-4}$	$0{,}574 \cdot 10^4$
				$20{,}75 \cdot 10^{-4}$	$0{,}236 \cdot 10^4$
			H_2O	$6{,}1 \cdot 10^{-4}$	$0{,}022 \cdot 10^4$ (aus Absorptionsmessungen.)

Die gute Übereinstimmung der Werte $p \cdot \frac{e}{m}$ der verschiedenen Substanzen bei korrespondierenden Wellenlängen erstreckt sich auf die ultravioletten und zum Teil auch auf die ultraroten Eigenschwingungen. Drude, der nur im Ultravioletten gerechnet hat, findet sie nicht, da seine Werte infolge der Ungenauigkeit der verwendeten Konstanten schlechte Werte $p \cdot \frac{e}{m}$ liefern.

Nimmt man die erweiterte Thomsonsche Theorie als richtig an, so ist zu bedenken, daß jeder der Werte für Ultrarot als die Summe der $p \cdot \frac{e}{m}$-Werte der beiden schwingenden Ionen aufzufassen ist. Auf deren Wiedergabe ist in der Tabelle verzichtet, da nicht in allen Fällen entschieden ist, welcher Art die Ionen sind.

Havelock[1]) hat aus der Dispersionsformel von Maclaurin ebenfalls für Steinsalz $p \cdot \frac{e}{m}$ berechnet. Die Maclaurinsche Formel heißt

$$\frac{n^2-1}{n^2+a} = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+a} + \frac{c_1}{\lambda^2-\lambda_1^2} + \frac{c_2}{\lambda^2-\lambda_2^2}.$$

Für Steinsalz ist

$$\lambda_v = 0{,}127 \cdot 10^{-4}$$

und

$$\lambda_r = 51{,}3 \cdot 10^{-4}.$$

Im Ultravioletten ist

$$p \cdot \frac{e}{m} = 4{,}06 \cdot 10^7.$$

Drude fand $6{,}28 \cdot 10^7$. $4{,}06 \cdot 10^7$ ist als ein Mittelwert zwischen den Werten $6{,}2 \cdot 10^7$ und $1{,}16 \cdot 10^7$ aufzufassen, die ich oben aus Martensschen Daten berechnet habe.

Im Ultraroten findet Havelock

$$p \cdot \frac{e}{m} = 0{,}0536 \cdot 10^4;$$

dieser Wert stimmt sehr gut überein mit dem oben aus Martensschen Zahlen zu $0{,}055 \cdot 10^7$ berechneten.

Es ist von Interesse, festzustellen, daß auch nach diesen Berechnungen, wie nach den früheren[2]), das optische $\frac{e}{m}$ der Elektronen kleiner ist als das nach den übrigen Verfahren bestimmte. In den früheren Arbeiten haben wir gefunden, $\frac{e}{m}$ ist optisch etwa $1{,}2 \cdot 10^7$. Nach den angegebenen Daten wäre es eher noch etwas kleiner, nämlich $1{,}17 \cdot 10^7$.

Neuerdings hat John Koch[3]) aus genauen Dispersionsmengen an Helium $p \cdot \frac{e}{m}$ berechnet zu $2{,}15 \cdot 10^7$ bei der berechneten Wellenlänge $0{,}0485 \cdot 10^{-4}$. Unter der Annahme, daß es im Heliumatom zwei locker gebundene Elektronen gibt, daß also $p = 2$ ist, ist $\frac{e}{m} = 1{,}08 \cdot 10^7$. Ferner gibt er für Wasserstoff folgende berechnete Daten: bei der Wellenlänge $0{,}0925 \cdot 10^{-4}$ ist $\frac{e}{m} = 1{,}05 \cdot 10^7$. Beide Werte sind beträchtlich niedriger als $1{,}78 \cdot 10^7$ und sind nahe gleich $1{,}17 \cdot 10^7$.

Freiburg, Dezember 1913.

(Eingegangen 17. Dezember 1913.)

1) Roy. Soc. Proc. (A) **86**, 1911.
2) J. Koenigsberger und K. Kilchling, l. c.
3) Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **9**, Nr. 6, 1913.

Über Brownsche Bewegungen im Strahlungsfeld.

Von A. D. Fokker.

Bei den Diskussionen, die sich an die Vorträge anknüpften, die im April d. J. von der Kommission der Wolfskehl-Stiftung in Göttingen über die kinetische Theorie der Materie veranstaltet wurden, betonten einige Redner, man möchte doch gerne genau wissen, wieviel Energie einem im Strahlungsfelde frei beweglichen Elektron zuteil werden würde.

Diese Frage nach der mittleren kinetischen Energie, die ein freies Elektron, oder ein vollkommener Spiegel, oder ein willkürlicher Körper mit vollkommen spiegelnder Oberfläche bei seiner Brownschen Bewegung im Strahlungsfeld hat, habe ich in meiner Leidener Dissertation[1]) rechnerisch beantwortet.

Die angewandte Methode rührt von Einstein[2]) her; auch wurde der Weg von Lorentz[3]) gezeigt. Sie beruht darauf, daß man die auf das Elektron bzw. auf den Körper wirkende Kraft in zwei Teile zerlegen kann: in eine Strahlungsreibung, die der Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung proportional ist, und in eine schwankende, von der Geschwindigkeit unabhängige Kraft. Bezeichnet man erstere mit $-Qv$, und den Impuls der letzteren während eines sehr kleinen Zeitintervalls τ in der Richtung der X-, Y- und Z-Achse mit X, Y, Z, so findet man für die mittlere kinetische Energie:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{\overline{X^2}+\overline{Y^2}+\overline{Z^2}}{4Q\tau}.$$

Auch in anderer als der von Einstein benutzten Weise kann man diese Formel ableiten, indem man zeigt, daß bei der über die wirkende Kraft gemachten Annahme eine Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung unter den Elektronen stationär ist, bei der die mittlere kinetische Energie den angegebenen Betrag hat[4]). Wenn

1) Over Brownsche bewegingen in het stralingsveld, en waarschijnlijkheidsbeschouwingen in de stralingstheorie.
2) Einstein, diese Zeitschr. **10**, 185, 1909; Einstein u. Hopf, Ann. d. Phys. **33**, 1105, 1910.
3) Lorentz, Rapp. Réunion de Bruxelles, S. 37. 1911.
4) Vgl. Diss. IV, § 5, und einen in den Archives néerlandaises erscheinenden Auszug derselben.

man dem Körper nur einen Freiheitsgrad läßt, so fallen selbstverständlich im Zähler die $\overline{Y^2}$ und $\overline{Z^2}$ fort.

Man weiß, daß Einstein diese Formel benutzt hat, um, nachdem er für einen monochromatischen Spiegel die Reibungskraft unter Zugrundelegung der Planckschen Strahlungsformel berechnet hatte und dem Äquipartitionssatze gemäß, für die mittlere Energie $\frac{1}{2}kT$ eingesetzt hatte, zu folgern, daß das mittlere Impulsquadrat aus zwei Teilen bestände, von denen einer aus den ondulatorischen Interferenzschwankungen des Strahlungsfeldes erklärt werden konnte, der andere aber quantenartige Schwankungen im Felde erforderte.

Es wird jetzt umgekehrt $\overline{X^2}$ berechnet, und daraus die mittlere Energie gefolgert.

Man denke sich das Strahlungsfeld zerlegt in eine große Anzahl von einander durchkreuzenden Systemen ebener Wellen verschiedener Frequenzen n (d. h. Schwingungszahl in der Zeit 2π).

Das Elektron wird von jedem einzelnen elementaren System ebener Wellen zur Mitschwingung erregt. Jedoch bleibt es, zufolge seiner Ausstrahlung, in seiner Phase nicht π, sondern etwas weniger als π bei den erregenden Wellen zurück. Dadurch hat die Kraft, die es durch seine Schwingungsgeschwindigkeit vom Magnetfelde der Wellen erfährt, einen positiven Zeitmittelwert, das Elektron erfährt einen dauernden Strahlungsdruck. Und zwar erfährt es von einem Wellensystem, dem es entgegenläuft, einen größeren Strahlungsdruck als von einem gleichen System, von dem es überholt wird. Summiert man den Druck für alle Wellensysteme, die es im Strahlungsfelde gibt, so resultiert, unter Vernachlässigung von Gliedern mit $\frac{v^2}{c^2}$ für die Strahlungsreibung:

$$Qv = \frac{16\,e^4}{9\,c^6 m^2}\, v \int_0^\infty K_n\, dn .$$

Hier bezeichnet e die elementare elektrostatische Ladung des Elektrons, m seine Masse und in der üblichen Weise $2K_n\,dn\,d\omega$ die Energie, die im Strahlungsfeld, mit Frequenzen zwischen n und $n+dn$, durch ein Flächenelement (gleich der Einheit) innerhalb eines zu ihm senkrechten Kegels mit Öffnung $d\omega$ fließt.

Aber das Elektron erfährt, bei einer erregten Elementarschwingung, nicht nur vom erregenden Wellensystem eine Kraft, sondern auch von allen anderen elementaren Wellensystemen. Jedes System gibt durch „Interferenz" mit den von den gesamten anderen Systemen erregten Schwingungen Anlaß zu einer Kraft, die im Mittel zwar gleich null ist, deren Zeitintegral über das Intervall τ aber positive und negative Schwankungen haben kann, deren quadratischer Mittelwert eben die Größe $\overline{X^2}$ ist, die wir brauchen. Die Berechnung liefert

$$\overline{X^2} = \frac{2^6 \pi^3 \tau}{3^2}\,\frac{e^4}{c^4 m^2} \int_0^\infty \frac{K_n^2}{n^2}\, dn .$$

Denselben Wert findet man für $\overline{Y^2}$ und $\overline{Z^2}$. Für das Elektron findet man also die mittlere kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung:

$$\overline{\frac{1}{2}mv^2} = 3\pi^3 c^2 \frac{\int_0^\infty \frac{K_n^2}{n^2}\, dn}{\int_0^\infty K_n\, dn} \qquad (I)$$

Wenn man jetzt als Ausdruck für die experimentelle Kenntnis des Strahlungsfeldes die Plancksche Formel den weiteren Berechnungen zugrunde legt,

$$K_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

und beachtet, daß, da $K_n\,dn = K_\nu\,d\nu$, auch $K_n = \frac{1}{2\pi} K_\nu$ ist, und weiter bei den Integrationen als unabhängige Variable wählt $x = \frac{h\nu}{kT}$, so findet man

$$\overline{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{3}{8}\,kT\, \frac{\int_0^\infty \frac{x^4}{(e^x-1)^2}\, dx}{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx}$$

Die Proportionalität mit kT kommt nicht nur durch die Plancksche Formel zustande, sie wird geliefert von jeder Strahlungsformel, die dem Wienschen Verschiebungsgesetze genügt.

Die Berechnung der Integrale liefert

$$\overline{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{3}{2}\,kT\, \frac{\sum_1^\infty \frac{1}{q^4} - \sum_1^\infty \frac{1}{q^5}}{\sum_1^\infty \frac{1}{q^4}},$$

$$\overline{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{3}{2}\,kT \times 0{,}0417 .$$

Das Resultat ist 24mal kleiner als der Äquipartitionssatz fordert.

Die mittlere Schwingungsenergie kommt nicht in Betracht. Wenn man dieselbe mit $\bar{\varepsilon}$ andeutet und mit kT vergleicht, so stellt sich für die Größenordnung das Verhältnis heraus:

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{kT} (=) \frac{3}{4\pi} \frac{R\lambda^2 u}{kT},$$

worin u die Energiedichte der Strahlung, λ eine in Betracht kommende Wellenlänge, z. B. die maximaler Intensität, und R den Radius des Elektrons vorstellt. Für gewöhnliche Temperatur ist das Verhältnis von der Größenordnung 10^{-12}.

Für einen vollkommenen Spiegel mit nur einem Freiheitsgrad (senkrecht auf ihn selbst), ergab die Rechnung das der Formel (I) entsprechende Resultat

$$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = \pi^3 c^2 \frac{\int_0^\infty \frac{K_\nu^2}{\nu^2} d\nu}{\int_0^\infty K_\nu d\nu} = \frac{1}{2} kT \times 0{,}0417,$$

und ebensoviel Energie fand ich für jeden Freiheitsgrad eines beliebigen Körpers mit spiegelnder Oberfläche.

Es stellt sich also heraus, daß ein Körper bei der Energieverteilung, wenn die Energie durch Strahlung übermittelt wird, weniger bekommt als bei direktem mechanischen Austausch, obwohl er an sich nichts Quantenhaftes, keine eigene Periodizität besitzt.

Zürich, 20. November 1913.

(Eingegangen 27. November 1913.)

Über die Temperatur inhomogener Flammen [1].

Von Hedwig Kohn.

Auf die von Kirchhoff und Bunsen entdeckte Erscheinung der Linienumkehr in der mit Metallsalzen gefärbten Bunsenflamme hat bekanntlich Féry [2]) eine einfache Methode zur Bestimmung der Flammentemperatur aufgebaut. Ein schwarzer Körper oder ein als solcher geeichter Nernstfaden wird dicht vor der gefärbten Flamme aufgestellt, so daß seine Strahlen den in der Flamme leuchtenden Dampf durchsetzen; Nernstfaden und Flamme werden auf den Spalt eines Spektrometers projiziert. Im Fernrohr desselben sieht man das kontinuierliche Spektrum des Fadens, von dem sich die vom Dampf emittierte Spektrallinie je nach der Intensität des Fadens bald hell, bald dunkel abhebt; bei einer bestimmten Helligkeit des Fadens verschwindet die Spektrallinie auf dem kontinuierlichen Grund („Umkehr"). Dies ist das Kriterium dafür, daß der Dampf ebensoviel Energie emittiert wie absorbiert. Für den Fall, daß der in der Flamme leuchtende Dampf ein sogenannter Temperaturstrahler ist, wird dann seine Temperatur, nach dem Kirchhoffschen Gesetz, gleich der schwarzen Temperatur des umkehrenden Nernstfadens [1]) für die Wellenlänge der betrachteten Spektrallinie sein. Die in dieser Weise bestimmte Flammentemperatur soll als „Umkehrtemperatur" bezeichnet werden.

Durch gleichzeitige Bestimmung der „Umkehrtemperatur" der mit Metallsalzen gefärbten Flamme des Bec Méker und ihrer thermischen Temperatur nach einem von den Strahlungseigenschaften des Dampfes unabhängigen Verfahren konnte ich zeigen, daß, im Intervall von 900—1800° C, die „Umkehrtemperatur" mit der wahren thermischen Temperatur der Flamme bis auf 5—10° identisch ist [2]). Hieraus folgt, daß die in der Flamme leuchtenden Dämpfe quantitativ dem Kirchhoffschen Gesetz gehorchen, auf welchem die Bestimmung der „Umkehrtemperatur" basiert, und somit innerhalb der untersuchten Grenzen als reine Temperaturstrahler zu betrachten sind. Von der Art des in die Flamme eingeführten Salzes muß daher die „Umkehrtemperatur" notwendig unabhängig sein; sie darf sich nicht ändern, wenn verschiedene Salze ein und desselben Metalles zur Färbung dienen oder, wenn verschiedene Metalle in die Flamme gebracht, die Umkehrmessungen also an verschiedenen Linien ausgeführt werden.

Zu diesem Resultat gelangte bereits Féry [3]), später E. Bauer [4]), dessen umfassende Messungen zeigten, daß die „Umkehrtemperaturen" zahlreicher Linien und Banden untereinander auf mindestens 5° übereinstimmen [5]); meine

1) Die vorliegende Arbeit schließt sich an die auf Veranlassung von Herrn Geheimrat O. Lummer und Herrn Professor E. Pringsheim ausgeführte Dissertation der Verfasserin: „Über das Wesen der Emission der in Flammen leuchtenden Metalldämpfe", Breslau 1913, an; ein Auszug aus der Dissertation wird demnächst in den Ann. d. Phys. veröffentlicht werden.

2) Ch. Féry, „Sur la température des flammes", Compt. rend. **137**, 909, 1903.

1) Die Helligkeit des ohne Vorwärmer brennenden Nernstfadens kann z. B. durch Variieren des Lampenstromes verändert werden; durch photometrischen Vergleich mit dem schwarzen Körper wird dann die schwarze Temperatur des Fadens als Funktion des Stromes ermittelt.

2) Die genaue Beschreibung dieser Messungen erfolgt in der Dissertation.

3) Ch. Féry, l. c. (1903).

4) E. Bauer, „Recherches sur le rayonnement", Thèses, Paris, Gauthier-Villars, S. 163, 1912; siehe auch „Sur le rayonnement et la température des flammes", Le Radium **6**, 7, 1909 und den Nachtrag zu diesem Aufsatz in der gleichen Zeitschrift (1909).

5) Die wahre thermische Flammentemperatur wird bei Bauer allerdings nicht gemessen.

eigenen Untersuchungen führten zu dem gleichen Resultat[1]).

Im Gegensatz zu diesen Ergebnissen stehen die Beobachtungen von Kurlbaum und G. Schulze[2]), welche einen Einfluß des in die Flamme eingeführten Salzes, also auch der chemischen Vorgänge in der Flamme auf die „Umkehrtemperatur" finden und daher schließen, daß möglicherweise Lumineszenzerscheinungen vorliegen. Im einzelnen gelangten sie zu folgenden Resultaten:

1. Für ein und dieselbe Spektrallinie erhält man verschiedene „Umkehrtemperaturen", wenn verschiedene Salze desselben Metalles in die Flamme eingeführt werden.

2. Für verschiedene Linien, also verschiedene Metalle, ergeben sich auch verschiedene „Umkehrtemperaturen", und zwar nehmen sie mit abnehmender Wellenlänge der Linie zu.

3. Die „Umkehrtemperatur" einer bestimmten Spektrallinie wird gesteigert, wenn man noch ein zweites Salz in die Flamme einführt, dessen Linie bei einer höheren Temperatur „umgekehrt" wird, als die des ursprünglich eingeführten Salzes.

Zu diesen Beobachtungen nimmt E. Bauer[3]) Stellung. Er erklärt die Resultate von Kurlbaum und Schulze aus der Temperaturinhomogenität der Flamme, welche bei einer Gesamtfärbung der Flamme, wie sie die genannten Autoren benutzten, eine wesentliche Rolle spielt. Er selbst umgeht diese Schwierigkeit, indem er nur engbegrenzte Zonen der Flamme färbt, außerdem noch einen schmalen Spalt zur Isolierung der aus einem bestimmten Flammenort kommenden Strahlen vor der Flamme anbringt. Der für seine Messungen dienende Mékerbrenner stand mit seiner 5 cm langen Längskante parallel zum Strahlengang. In die Mitte des Brennerrostes wurde ein kleines Stückchen des zu untersuchenden Salzes gelegt, so daß in der Flamme immer an der gleichen Stelle eine farbige Fackel von etwa einem Millimeter Durchmesser entstand. Diese Methode der Flammenfärbung benutzt Bauer auch, um die Verteilung der „Umkehrtemperatur" in der Flamme festzustellen[4]). Er mißt die „Umkehrtemperatur" von Punkt zu Punkt und bildet das arithmetische Mittel der erhaltenen Temperaturwerte. Die in dieser Weise berechnete „mittlere Umkehrtemperatur" der Flamme ist geringer als die gemessene „mittlere Umkehrtemperatur" einer im ganzen gefärbten Flamme. Hieraus schließt Bauer auf einen vorherrschenden Einfluß der heißeren Flammenzonen, der um so mehr ins Gewicht fallen wird, je schwerer das eingeführte Salz zu „reduzieren" oder zu „dissoziieren" ist, „weil dann die Konzentration der emittierenden und absorbierenden Teilchen, vor allem in den kälteren Flammenzonen, immer geringer wird". Die unter 3 angegebene Beobachtung von Kurlbaum und Schulze erklärt Bauer daraus, daß ein Rückgang der Dissoziation eines Salzes eintritt, sobald ein zweites vom gleichen Radikal hinzugefügt wird.

In der Tat zeigt eine von Bauer zusammengestellte Tabelle für die Bildungswärmen der von Kurlbaum und Schulze untersuchten Salze, daß diejenigen Salze schwerer zu reduzieren sind, bei denen die Messungen eine höhere „mittlere Umkehrtemperatur" ergeben haben (bei den Karbonaten ist die Bildungswärme der Oxyde angegeben, in welche ja die Karbonate in der Flamme übergeführt werden). Tabelle 1 gibt die Bauersche Zusammenstellung wieder.

Tabelle 1.

Salze	Bildungswärme in g-cal für ein Atom des Metalles.
Na_2CO_3	50400
$LiCl$	93400
Li_2CO_3	70500
$NaCl$	97300
$TlCl$	49000
KCl	105000
$RbCl$	$>$ 105000 (?)

Falls die Bauersche Deutung richtig ist, so müßte man die von Kurlbaum und Schulze beobachtete Abhängigkeit der „Umkehrtemperatur" bei Kenntnis der Temperaturverteilung in der Flamme aus der Emission und Absorption in den einzelnen Flammenschichten berechnen können. Hiermit beschäftigt sich die vorliegende Notiz.

Ich untersuchte zunächst, ob ich bei der Anordnung von Kurlbaum und Schulze deren Resultate wieder erhalten könnte.

An Stelle des Bec Méker wurde ein gewöhnlicher Teclu-Brenner in den Strahlengang gebracht, dessen Flamme einen 4—5 cm hohen dunklen Kegel hatte. Die Blende vor der Flamme wurde entfernt, die Färbung durch eine Salzperle erzeugt, und zwar wurde die Perle, wie bei Kurlbaum und Schulze, zwischen den äußeren Saum und den blauen Innenkegel der

1) Vgl. die Dissertation.

2) F. Kurlbaum und G. Schulze, „Temperatur nichtleuchtender mit Metallsalzen gefärbter Flammen". Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. **8**, 239, 1906.

3) E. Bauer, l. c., S. 159, 1912.

4) E. Bauer, l. c., S. 156, 1912. Die gleiche, für die Flamme des Bec Méker charakteristische Temperaturverteilung findet auch H. Schmidt, Inaug.-Diss., Berlin 1909. Die von mir benutzte Flamme hat eine ähnliche Verteilung, nur ist der Unterschied zwischen dem Temperaturmaximum im Flammensaum und dem Minimum in der Mitte nicht so erheblich wie bei Bauer und bei Schmidt; vgl. die Dissertation der Verfasserin.

Flamme eingeführt. Nur bei einer ganz bestimmten Anordnung beobachtete ich ein Ansteigen der „Umkehrtemperatur" mit abnehmender Wellenlänge der Spektrallinie, wenn nämlich die Perle in den dem Nernstfaden zugekehrten Flammenteil eingeführt wurde, und zwar so, daß die Strahlen des umkehrenden Nernstfadens durch den Kegel und somit auch durch die ihn begrenzenden kälteren Flammenzonen hindurchgehen mußten, also erst eine heißere, dann eine kältere Dampfschicht passierten. In diesem Falle stieg auch die „Umkehrtemperatur" an der *Li*-Linie, wenn noch andere Salze, die Linien von kürzerer Wellenlänge emittieren, in die Flamme eingeführt wurden. An den *D*-Linien wurde kein Einfluß durch fremde Salze beobachtet. Tabelle 2 zeigt die Ergebnisse der Messungen. Es ist T die „Umkehrtemperatur" an einer bestimmten Linie, $\pm \Delta T$ die mittlere Abweichung einer Einstellung vom Mittelwert T.

Tabelle 2.

λ (Wellenlänge in μ)	Salz	T (abs.)	$\pm \Delta T$
0,766	*KCl*	1965°	7°
0,670	*LiCl*	1921	4
0,589	*NaCl*	1953	1
0,535	*TlCl*	1980	5
0,421	*RbCl*	2003	5
0,670	*LiCl*	1901	4
	+ *NaCl*	1914	3
	+ *RbCl*	1924	2
	+ *KCl*	1931	3

Um nun zu untersuchen, ob sich auch rechnerisch die Abhängigkeit der „mittleren Umkehrtemperatur" von der Art des in die Flamme eingeführten Salzes aus der Temperaturinhomogenität erklären läßt, bin ich zunächst von einem möglichst einfach gewählten Beispiel ausgegangen.

Ich nehme an, daß die Strahlen der umkehrenden Lichtquelle nacheinander nur zwei verschieden temperierte Dampfschichten durchsetzen, zuerst eine heißere (Schicht 1), dann eine kältere (Schicht 2), so wie es der obigen Versuchsanordnung entspricht. Die heißere habe eine Temperatur von $T_1 = 2050°$ abs., die kältere von $T_2 = 1900°$ abs. Solch ein Temperaturunterschied von 150° besteht nach den Bauerschen Messungen z. B. zwischen den Temperaturen im Saum und in der Mitte der Flamme, ist also mit der Erfahrung vereinbar.

Die zu berechnende „mittlere Umkehrtemperatur" T der beiden Schichten ist die Temperatur, die die umkehrende (schwarze) Lichtquelle haben muß, damit der von den Schichten gemeinsam emittierte „Spektralstreifen" auf ihrem Spektrum gerade verschwindet. Dies tritt ein, wenn der vom betrachteten „Spektralstreifen" eingenommene Wellenlängenbezirk mit und ohne Anwesenheit der Dampfschichten die gleiche Intensität hat.

Im vorliegenden Falle haben wir es mit „unaufgelösten Linien" zu tun; denn trotz der Temperaturunterschiede in der Flamme waren keine Inhomogenitäten, wie z. B. Selbstumkehr, in den Linien zu sehen[1]). Bei der Berechnung der von den selektiv strahlenden Schichten emittierten (bzw. absorbierten und durchgelassenen) Energie ist daher nicht der innerhalb der „aufgelösten Spektrallinie" von Punkt zu Punkt variierende Wert des Emissionsvermögens E_λ (bzw. Absorptionsvermögens A_λ) zu benutzen, sondern es sind Integralwerte über die Breite der Linie von der Form $\int E_\lambda d\lambda$ (bzw. $\int A_\lambda d\lambda$) zu bilden, so wie es in der Arbeit von R. Ladenburg und F. Reiche „Über selektive Absorption"[2]) auseinandergesetzt wird. In dieser Arbeit werden zwei Arten von sogenannter „Gesamtabsorption" definiert, die bei der Absorption von selektiv strahlenden Körpern zu unterscheiden sind:

a) „Die ‚Gesamtabsorption schlechthin', die ein kontinuierliches Spektrum bzw. ein gewisser nicht unendlich schmaler Frequenzbereich desselben in dem betrachteten Körper erfährt",

b) „die ‚Linienabsorption', die das Licht einer Spektrallinie erleidet, das von einem, dem absorbierenden völlig gleichen leuchtenden Körper herrührt".

Es ist klar, daß die „Gesamtabsorption schlechthin" in unserem Falle bei der durch die 1. (heiße) Schicht, die „Linienabsorption" bei der durch die 2. (kalte) Schicht erfolgenden Absorption vorliegt.

Zur Bildung der oben genannten Integralwerte muß das Absorptionsvermögen oder der Extinktionskoeffizient des Dampfes als Funktion der Wellenlänge bekannt sein; diese Funktion liefert die Dispersionstheorie. Ladenburg und Reiche legen ihren Berechnungen die „gewöhnliche Drudesche Dispersionstheorie in der Bezeichnungsweise von Voigt" zugrunde. Bei den nun folgenden Ansätzen und Berechnungen wird der von Ladenburg und Reiche

1) Nur in diesem Falle hat es überhaupt einen Sinn, von einer „mittleren Umkehrtemperatur" zu sprechen, und ist es möglich, eine solche zu messen. Ist jedoch die Linie so weit aufgelöst, daß in ihr Inhomogenitäten wahrgenommen werden und auf Verschwinden der Ränder eingestellt werden kann, so bestimmt man keinen Mittelwert, sondern lediglich die „Umkehrtemperatur" derjenigen Flammenschicht, welche die breiteste Linie emittiert. Hierauf wird in einem folgenden Artikel näher eingegangen werden.

2) R. Ladenburg und F. Reiche, Sitz.-Ber. d. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur, 1912; siehe auch Ann. d. Phys. **42**, 181—209, 1913.

eingeschlagene Weg vollkommen innegehalten werden; im allgemeinen werden auch dieselben Bezeichnungen benutzt werden. Es sind lediglich einige Spezialisierungen notwendig.

Der Schwerpunkt des betrachteten Spektralstreifens habe die Frequenz ν_0, seine Breite betrage 2δ, so daß also die Grenzen durch $\nu_0 - \delta$ und $\nu_0 + \delta$ gegeben sind. Innerhalb dieser Grenzen sei die Intensität der „umkehrenden" Lichtquelle konstant, und zwar für den Fall, daß die Linie gerade auf dem kontinuierlichen Grunde verschwindet, vom Betrage $\bar{\varepsilon}\, d\nu$ für jeden unendlich schmalen Frequenzbereich $d\nu$.

Bei Anwesenheit der Dampfschichten setzt sich die Intensität am betrachteten Spektralstreifen aus drei Anteilen zusammen:

I. Von der auf die absorbierende Dampfschicht auffallenden Intensität $\bar{\varepsilon} d\nu$ wird nach dem Biot-Lambertschen Absorptionsgesetz der Bruchteil

$$\bar{\varepsilon}\, d\nu \cdot e^{-2kl} \tag{1}$$

hindurchgelassen, wo k der Absorptionskoeffizient der Dampfschicht, l die Länge derselben in Richtung des Strahlenganges ist. Es sei im betrachteten Falle:

für Schicht 1: $k = k_1$,
„ „ 2: $k = k_2$.

Beide Schichten seien gleich lang. Für die von beiden Schichten hindurchgelassene Strahlung ergibt sich also durch Integration über die Breite der unaufgelösten Linie

$$\bar{\varepsilon} \int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} e^{-2k_1 l} \cdot e^{-2k_2 l}\, d\nu . \tag{2}$$

II. Die Schicht 1 läßt nach dem vorigen von einer auffallenden Intensität $\varepsilon(\nu) d\nu$ an jeder Wellenlänge innerhalb des betrachteten Bereichs den Bruchteil

$$\varepsilon(\nu)\, d\nu\, e^{-2k_2 l} \tag{3}$$

hindurch, absorbiert also den Bruchteil

$$\varepsilon(\nu)\, d\nu\, (1 - e^{-2k_2 l}) . \tag{3a}$$

Ihr „Absorptionsvermögen" $A(\nu)$, definiert als der Quotient aus der absorbierten und auffallenden Energie, ist somit:

$$A(\nu) = 1 - e^{-2k_2 l} . \tag{4}$$

Bei der Annahme reiner Temperaturstrahlung ist daher die von der Schicht 1 emittierte Intensität, innerhalb des unendlich schmalen Bezirks $d\nu$

$$\varepsilon_1(\nu)\, d\nu \cdot A(\nu) = \varepsilon_1(\nu)\, (1 - e^{-2k_1 l})\, d\nu , \tag{5}$$

wenn $\varepsilon_1(\nu) \cdot d\nu$ das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers von der Temperatur der Schicht 1 ist.

Von dieser Intensität läßt Schicht 2 wiederum den Bruchteil

$$\varepsilon_1(\nu)(1 - e^{-2k_1 l}) \cdot e^{-2k_2 l}\, d\nu \tag{6}$$

hindurch. Der Integralwert der hindurchgelassenen Intensität ist, wiederum unter der Annahme, daß $\varepsilon_1(\nu)$ innerhalb des Spektralstreifens den konstanten Wert ε_1 hat:

$$\varepsilon_1 \int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} (1 - e^{-2k_1 l}) \cdot e^{-2k_2 l}\, d\nu . \tag{7}$$

III. Die von der 2. Schicht insgesamt emittierte Energie ist, wenn das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers von der gleichen Temperatur den konstanten Wert ε_2 hat, entsprechend dem Ansatz (5)

$$\varepsilon_2 \int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} (1 - e^{-2k_2 l})\, d\nu . \tag{8}$$

Demnach beträgt also die bei Anwesenheit der beiden Dampfschichten in den Bezirk des „Spektralstreifens" fallende Energie:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\varepsilon} \int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} e^{-2k_1 l} \cdot e^{-2k_2 l}\, d\nu + \varepsilon_1 \int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} (1 - e^{-2k_1 l}) \cdot \\ &\cdot e^{-2k_2 l}\, d\nu + \varepsilon_2 \int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} (1 - e^{-2k_2 l})\, d\nu . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die im kontinuierlichen Spektrum der „umkehrenden Lichtquelle" an der betreffenden Stelle herrschende Intensität ist:

$$\bar{\varepsilon} \int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} d\nu .$$

Die Bedingung für das Verschwinden der Linie ist also durch die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\varepsilon} \int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} e^{-2k_1 l} \cdot e^{-2k_2 l}\, d\nu + \varepsilon_1 \int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} (1 - e^{-2k_1 l}) \cdot \\ &e^{-2k_2 l}\, d\nu + \varepsilon_2 \int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} (1 - e^{-2k_2 l})\, d\nu = \varepsilon \int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} d\nu \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

gegeben.

Statt des Absorptionskoeffizienten k soll der Extinktionskoeffizient $\varkappa$ eingeführt werden, dessen Abhängigkeit von der Frequenz ν in der Drudeschen Dispersionstheorie durch die Gleichung

$$n\varkappa = \frac{\varrho \nu'}{2 n_0} \cdot \frac{\nu}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \cdot \nu'^2} \tag{11}$$

gegeben ist[1]).

Hierin ist:

ν_0 die Eigenfrequenz des schwingenden Elektrons,

ν' die Dämpfung desselben,

1) Vgl. z. B. W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik, Leipzig 1908.

$\varrho = \frac{4\pi \mathfrak{N} e^2}{m}$, wo $\frac{e}{m}$ die spezifische Ladung der Elektronen, $\mathfrak{N}$ ihre Anzahl ist, schließlich

n_0 „der Berechungsquotient, der in der Umgebung von ν_0 herrschen würde, wenn die Elektronen dieser Gattung nicht vorhanden wären".

Zwischen k und $n\varkappa$ besteht die Beziehung:

$$k = n\varkappa \frac{\nu}{c} \tag{12}$$

(c = Lichtgeschwindigkeit).

Es soll nun noch die Größe:

$$\frac{\varrho \nu' l}{n_0 c} = \sigma \tag{13}$$

gesetzt werden, dann wird nach Gleichung (11)

$$2kl = \sigma \cdot \frac{\nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2}. \tag{14}$$

Ferner wird noch, wie in der zitierten Arbeit:

$$\left.\begin{aligned} &\nu_0 - \nu = \mu, \\ &\text{gesetzt und, unter der Voraussetzung, daß} \\ &\text{die halbe Linienbreite } \delta \text{ sehr klein gegen} \\ &2\nu_0 \text{ ist,} \\ &\nu_0 + \nu = 2\nu_0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Nach Gleichung (14) hängt k wesentlich von ϱ oder $\mathfrak{N}$, d. h. von der Zahl der schwingungsfähigen Gebilde und von ihrer Dämpfung ν' ab. Ich mache die Annahme, daß die Dämpfung in beiden Schichten gleich ist. Der hierdurch begangene Fehler ist vermutlich sehr gering, wenigstens ändert sich nach der Theorie von H. A. Lorentz, bei der sie durch die Zusammenstöße der Moleküle erklärt wird, ν' nur wie die Quadratwurzel aus der Temperatur. Dagegen sei im allgemeinen die Zahl der emittierenden Zentren in beiden Schichten verschieden und dementsprechend

$$\left.\begin{aligned} &\text{in Schicht 1:} && \sigma = \sigma_1, \\ &\text{„ „ 2:} && \sigma = \sigma_2. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die Bedingungsgleichung (10) geht unter Berücksichtigung von (14), (15), (16) über in

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\varepsilon} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4\mu^2+\nu'^2}} d\mu + \varepsilon_1 \int_{-\delta}^{+\delta} \left(1 - e^{-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4\mu^2+\nu'^2}}\right) \cdot \\ &\cdot e^{-\frac{\sigma_1}{4\mu^2+\nu'^2}} d\mu + \varepsilon_2 \int_{-\delta}^{+\delta} \left(1 - e^{-\frac{\sigma_2}{4\mu^2+\nu'^2}}\right) d\mu = \\ &= \varepsilon \int_{-\delta}^{+\delta} d\mu \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\varepsilon} \int_{-\delta}^{+\delta} \left(1 - e^{-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4\mu^2+\nu'^2}}\right) d\mu = \\ &= \varepsilon_1 \int_{-\delta}^{+\delta} \left(1 - e^{-\frac{\sigma_1}{4\mu^2+\nu'^2}}\right) \cdot e^{-\frac{\sigma_2}{4\mu^2+\nu'^2}} d\mu + \\ &+ \varepsilon_2 \int_{-\delta}^{+\delta} \left(1 - e^{-\frac{\sigma_2}{4\mu^2+\nu'^2}}\right) d\mu, \end{aligned}\right\} \tag{10b}$$

wofür ich

$$\bar{\varepsilon} \cdot A = \varepsilon_1 \cdot B + \varepsilon_2 \cdot C$$

schreiben will.

Jedes der drei auftretenden Integrale ist in folgender Weise zu zerlegen:

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{+\delta} &= \int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{-\delta} - \int_{+\delta}^{\infty} \\ &= R_1 - R_2 - R_3. \end{aligned}$$

In erster Annäherung kann jedes der Integrale in (10b) durch das Teilintegral R_1 ersetzt werden (die Teilintegrale R_2 und R_3 sind nur als Korrektionsglieder für eine zweite Annäherung anzusehen und sollen hier unberücksichtigt bleiben).

Die nun zu berechnenden Teilintegrale R_1 werden durch partielle Integration in Besselsche Funktionen von der allgemeinen Form:

$$I_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{iz\cos\varphi} \cdot \cos n\varphi \, d\varphi$$

übergeführt.

Für die einzelnen Integrale ergibt sich:

$$\begin{aligned} A = \pi \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\nu'^2} \cdot \frac{\nu'}{2} \cdot e^{-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\nu'^2}} \Big[&I_0\left(i \cdot \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\nu'^2}\right) - \\ &- i I_1\left(i \cdot \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\nu'^2}\right)\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = -\pi \cdot \frac{\sigma_2}{\nu'^2} \cdot \frac{\nu'}{2} \cdot e^{-\frac{\sigma_2}{2\nu'^2}} \Big[&I_0\left(i \frac{\sigma_2}{2\nu'^2}\right) - \\ &- i I_1\left(i \cdot \frac{\sigma_2}{2\nu'^2}\right)\Big] + \pi \frac{\sigma_1+\sigma_2}{\nu'^2} \cdot \frac{\nu'}{2} \cdot \\ \cdot e^{-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\nu'^2}} \Big[&I_0\left(i \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\nu'^2}\right) - i I_1\left(i \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\nu'^2}\right)\Big], \end{aligned}$$

$$C = \pi \frac{\sigma_2}{\nu'^2} \cdot \frac{\nu'}{2} \cdot e^{-\frac{\sigma_2}{2\nu'^2}} \Big[I_0\left(i \frac{\sigma_2}{2\nu'^2}\right) - i I_1\left(i \frac{\sigma_2}{2\nu'^2}\right)\Big],$$

wo I_0 und I_1 die Besselschen Funktionen 0. und 1. Ordnung sind.

Setzt man nun noch

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sigma_1}{\nu'^2} = r_1, \\ &\frac{\sigma_2}{\nu'^2} = r_2, \\ &\frac{\sigma_1+\sigma_2}{\nu'^2} = r_1 + r_2, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

und führt die in (17) erhaltenen Werte in (10b) ein, so folgt:

$$\bar{\varepsilon}\pi(r_1+r_2)\frac{\nu'}{2}\cdot e^{-\frac{r_1+r_2}{2}}\left[I_0\left(i\cdot\frac{r_1+r_2}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-iI_1\left(i\cdot\frac{r_1+r_2}{2}\right)\right]=$$
$$\varepsilon_1\pi\cdot\frac{\nu'}{2}\left[(r_1+r_2)\,e^{-\frac{r_1+r_2}{2}}\left[I_0\left(i\frac{r_1+r_2}{2}\right)-\right.\right.$$
$$\left.-iI_1\left(i\frac{r_1+r_2}{2}\right)\right]-r_2\cdot e^{-\frac{r_2}{2}}\left[I_0\left(i\frac{r_2}{2}\right)-$$
$$\left.-iI_1\left(i\frac{r_2}{2}\right)\right]\Big]+\varepsilon_2\pi\frac{\nu'}{2}r_2e^{-\frac{r_2}{2}}\left[I_0\left(i\frac{r_2}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-iI_1\left(i\frac{r_2}{2}\right)\right].\qquad(19)$$

Die Auflösung nach $\bar{\varepsilon}$ ergibt

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\varepsilon_1(r_1+r_2)\cdot e^{-\frac{r_1}{2}}\cdot S\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\cdot r_2\cdot S\left(\frac{r_2}{2}\right)}{(r_1+r_2)\cdot e^{-\frac{r_1}{2}}\cdot S\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)}=\varepsilon_1-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\frac{r_2}{r_1+r_2}\cdot e^{\frac{r_1}{2}}\frac{S\left(\frac{r_2}{2}\right)}{S\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)},\qquad(20)$$

wo

$$S=[I_0-iI_1]$$

ist.

Mit $\bar{\varepsilon}$ ist auch die „mittlere Umkehrtemperatur" der beiden verschieden temperierten Dampfschichten unter Annahme reiner Temperaturstrahlung ermittelt.

Man sieht unmittelbar, daß bei gleicher Temperatur der beiden Schichten, bei welcher

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$$

sei, beim Verschwinden der Linien

$$\bar{\varepsilon}=\varepsilon$$

sein muß.

Die gewöhnliche Bedingung für das Verschwinden der Linie bei homogener Temperatur ergibt sich also als Spezialfall aus Gleichung (20).

Bei einer Temperaturdifferenz der beiden Schichten ergibt sich für $\bar{\varepsilon}$ ein Mittelwert aus ε_1 und ε_2, und somit für die gemeinsame „Umkehrtemperatur" der Schichten ein Mittelwert aus ihren Temperaturen T_1 und T_2, welcher von r_1 und r_2, d. h. also von der Zahl der emittierenden und absorbierenden Zentren in beiden Schichten abhängt.

Die möglichen Werte von r_1 bzw. r_2 liegen etwa zwischen $r=0{,}2$ und $r=10^4$, wenn

$$\nu'\sim 10^{10}$$

gesetzt wird[1]), und wenn ϱ zwischen 10^{20} und 10^{24} variiert[2]).

Zur Berechnung der „Umkehrtemperatur" in den einzelnen Fällen werde die Gleichung (20) in die Form:

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_1}=1-\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\cdot\frac{r_2}{r_1+r_2}\,e^{\frac{r_1}{2}}\cdot\frac{S\left(\frac{r_2}{2}\right)}{S\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)}\qquad(20a)$$

gebracht.

Ich habe die Berechnungen an drei Wellenlängen ausgeführt, nämlich an der *Li*-, der *Na*- und der *Rb*-Linie.

Das Helligkeitsverhältnis $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ wird aus den Temperaturen[1])

$$T_1=2050^0\ (\text{abs.}),$$
$$T_2=1900^0$$

nach dem Wienschen Gesetz berechnet.

Durch Einsetzen verschiedener Werte für r_1 und r_2 in Gleichung (20a) wird das Verhältnis $\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_1}$ und somit die der Intensität $\bar{\varepsilon}$ entsprechende Temperatur, das ist die gesuchte „mittlere Umkehrtemperatur", wiederum nach der Wienschen Gleichung gefunden.

Die Werte für S bei verschiedenen Argumenten, ebenso die der Exponentialfunktion, werden den Tabellen von Jahnke-Emde entnommen, wozu noch bemerkt sei, daß für solche Argumente x der Besselschen Funktionen, die größer als 10 waren, die Grenzausdrücke

$$\lim_{x=\infty} I_0(ix)=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}},$$
$$\lim_{x=\infty} I_1(ix)=\frac{ie^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

eingeführt wurden.

An den drei angegebenen Wellenlängen wurden die Berechnungen für drei verschiedene Fälle ausgeführt, für

1. $r_1=r_2=r$,
2. $r_1=2r_2$,
3. $r_1=10r_2$.

Bei Fall 2 und 3 wird also angenommen, daß in der kälteren Dampfschicht weniger emittierende Zentren geschaffen werden als in der heißen.

1) Vgl. R. Ladenburg und H. Senftleben, „Über die Absorption in Natrium-Flammen"; Die Naturwissenschaften, 1913.

2) Vgl. die Berechnungen von Ladenburg und Reiche, l. c., auf Grund der Untersuchungen von Gouy, sowie die Bestimmungen von ϱ an *Na*-Flammen durch Hallo, Geiger, Ladenburg.

1) Siehe S. 100.

In jedem der drei Fälle wird außerdem der Wert von r_1 bzw. r_2 zwischen den möglichen Grenzen variiert. In den Tabellen 3, 4, 5 werden für die drei verschiedenen Fälle die Werte r_1, r_2, $\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_1}$ und die sich hieraus an der Wellenlänge $\lambda = 0{,}589\ \mu$ ergebenden „mittleren Umkehrtemperaturen" T zusammengestellt. Die graphische Darstellung ist in den drei Kurven der nebenstehenden Figur gegeben. Die „mittleren Umkehrtemperaturen" sind als Ordinaten, die Werte von r_1 als Abszissen eingetragen.

Jede der Kurven zeigt, daß mit wachsendem r, also zunehmender Konzentration, die „mittlere

Tabelle 3.

$T_1 = 2050^0$, $\lambda = 0{,}589\ \mu$,
$T_2 = 1900^0$, $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0{,}385$.
$r_1 = r_2 = r$,

r	$\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_1}$	$\bar{T}$
0,2	0,677	1986°
0,4	0,665	1985
0,8	0,643	1978
2,0	0,605	1968
4,0	0,583	1962
6,0	0,575	1960
10,0	0,571	1959
20,0	0,570	1958
> 20,0 (d. h. ∞)	0,565	1957

Tabelle 4.

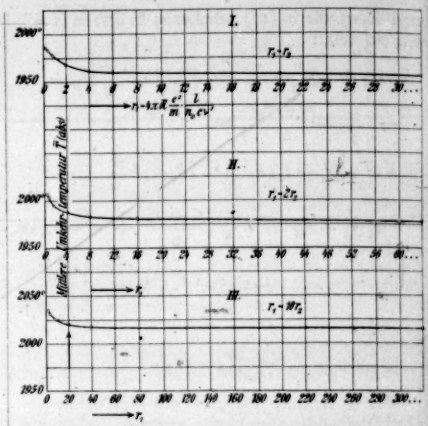
$r_1 = 2r_2$.

r_1	$\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_1}$	$\bar{T}$
0,4	0,770	2007°
0,8	0,752	2004
1,6	0,717	1995
4,0	0,686	1988
8,0	0,663	1983
16,0	0,657	1981
32,0	0,650	1980
44,0	0,649	1979
> 44,0 (∞)	0,645	1978

Tabelle 5.

$r_1 = 10r_2$.

r_1	$\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_1}$	$\bar{T}$
2	0,919	2036°
4	0,898	2032
8	0,873	2027
11	0,865	2026
20	0,858	2021
40	0,829	2018
120	0,819	2017
220	0,817	2016
> 220 (∞)	0,814	2016



Umkehrtemperatur" abnimmt, jedoch bald einen Grenzwert erreicht. Dies gilt sowohl, wenn die Konzentration der emittierenden Zentren in beiden Schichten die gleiche, wie wenn sie verschieden ist. Hierdurch lassen sich also die Kurlbaum-Schulzeschen Beobachtungen erklären. Denn sind für ein Salz die Werte von r_1 und r_2 kleiner als für ein anderes, so zeigt seine Linie eine höhere „Umkehrtemperatur" an[1]). So lange man annimmt, daß für die verschiedenen betrachteten Linien oder Salze das Verhältnis der in beiden Zonen herrschenden Dampfdichten das gleiche ist, auch wenn die Absolutwerte derselben verschieden sind, kann, nach der angestellten Berechnung, die Differenz der „mittleren Umkehrtemperaturen" nur bis 30° betragen, im Falle 3 sogar im Maximum nur 20°; allerdings ist dabei vorausgesetzt, daß die wirklichen Temperaturen in den beiden Schichten sich nur um 150° unterscheiden.

Stellt man sich aber auf den Bauerschen Standpunkt, nach welchem die Zahl der Zentren in der kalten Zone im Verhältnis zu derjenigen in der heißen Zone um so geringer wird, je schwerer ein Salz zu reduzieren ist, so kommen für das schwer zu reduzierende Salz Annahmen über die Dampfdichtenverteilung wie im Fall 2 oder 3 (also Kurve II oder III), für das leichter zu reduzierende wie in Fall 1 (Kurve I) in Betracht, und dann kann die Differenz der „mitt-

1) Hiernach muß auch die „mittlere Umkehrtemperatur" abnehmen, wenn man bei einer inhomogenen Flamme die Dampfdichte erhöht; bei aufgelösten Linien und Einstellen auf Verschwinden der Ränder bleibt dagegen die „Umkehrtemperatur" konstant; vgl. Anm. 1, S. 100 und die diesbezüglichen Messungen in der Dissertation.

leren Umkehrtemperatur" bis 79° betragen. (Bei meinen Beobachtungen, Tabelle 2, beläuft sich die größte Differenz auf 82°.) Wenn für die Linie, die dem Fall 1 gehorcht, z. B. $r_1 = r_2 = 10$ geworden, also der Grenzwert erreicht ist, und dann für eine andere Linie, für die Fall 3 in Betracht kommt, r_1 ebenfalls $= 10$, aber r_2 erst $= 1$ ist, so beträgt der Unterschied 65°. Und wenn schließlich für die beiden betrachteten Linien die Werte der Dampfdichten immer größer und größer werden, so bleibt doch eine Differenz der „mittleren Umkehrtemperaturen" von etwa 60° bestehen.

Der Einfachheit halber habe ich hier die einzelnen Fälle, auch insofern sie sich mit dem Vergleich der „Umkehrtemperaturen" an zwei verschiedenen Linien beschäftigen, an den für die Wellenlänge der D-Linien geltenden Kurven diskutiert. Ich möchte aber darauf hinweisen, daß, auch wenn die Dampfdichten für zwei verschiedene Linien als gleich angenommen werden, also r_1 und r_2 für beide gleich sind, ein kleiner Unterschied, bis 10°, zwischen den „mittleren Umkehrtemperaturen" besteht, und zwar wieder in dem Sinne, daß zur kürzeren Wellenlänge die höhere Temperatur gehört. Dieser Unterschied resultiert lediglich aus der verschiedenen Neigung der Isochromaten an den betreffenden Wellenlängen, die zur Berechnung von T mit Hilfe von T_1 und $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ dienen; diese Erscheinung kann aber, wie die Rechnung zeigt, auch nur dann zum Ausdruck gelangen, wenn Temperaturinhomogenitäten in der Flamme vorliegen.

Selbstredend sind die in die Berechnung eingeführten Größen zum Teil nur willkürlich gewählt[1]); es sollte ja auch nur untersucht werden, ob sich die Abhängigkeit der „Umkehrtemperatur" überhaupt durch die Temperaturinhomogenitäten erklären läßt, für einen quantitativen exakten Beweis müßte die Zahl der Teilchen in den Schichten anderweitig gemessen und in zweiter Linie aus den beobachteten „mittleren Umkehrtemperaturen" nach den hier aufgestellten Beziehungen berechnet werden. Auch wäre bei der Berechnung der kontinuierliche Temperaturübergang von einer Schicht in die andere zu berücksichtigen. Eventuell könnte uns dann auch umgekehrt die experimentelle Bestimmung der „mittleren Umkehrtemperatur" bei Kenntnis der Temperaturverteilung in der Flamme Aufschluß über die Verteilung der emittierenden Zentren in der inhomogenen Flamme geben, speziell bei dem Nebeneinanderbestehen verschiedener Dämpfe.

Zusammenfassend zeigen die vorliegenden Beobachtungen und Berechnungen, daß man die Resultate der Kurlbaum-Schulzeschen Messungen:

Abhängigkeit der „Umkehrtemperatur" der Flamme von der Art des eingeführten Salzes und Änderung der „Umkehrtemperatur" einer bestimmten Spektrallinie bei Hinzufügen eines zweiten Salzes,

auch bei Annahme reiner Temperaturstrahlung befriedigend erklären kann. Denn die berechnete „mittlere Umkehrtemperatur" einer inhomogenen Flamme, das ist die Temperatur, die man aus der Emission und Absorption in den verschieden temperierten Flammenzonen mit Hilfe des Kirchhoffschen Satzes und der Dispersionstheorie erhält, ist eine Funktion der Dichte der leuchtenden Zentren und hängt daher in der Tat nach der plausiblen Annahme Bauers über die verschiedene Reduzierbarkeit der verschiedenen Salze von der Art des in die Flamme eingeführten Salzes ab.

Breslau, Physikal. Institut der Universität, November 1913.

(Eingegangen 22. November 1913.)

Über die Thermokräfte von Leitern mit kleiner Elektronenzahl.

Von A. Weißenberger.

P. Cermak[1]) hat auf der Naturforscherversammlung in Wien 1913 über einen interessanten Demonstrationsversuch berichtet, der es ermöglicht, den Peltiereffekt der Systeme Eisen-Konstantan, Platin-Platinrhodium, Nernststift-Platin zur Projektion geeignet darzustellen. Bei Gelegenheit von Versuchen über die Thermokräfte von Leitern hohen Widerstandes, mit denen ich seit etwa 2 Jahren beschäftigt bin[2]), habe ich auch den Peltiereffekt der Kombination Platin-Nernststift nach einer etwas anderen Methode bei etwa 2200° festgestellt, die hier nebst anderen Resultaten der Untersuchung, deren Veröffentlichung sich möglicherweise noch etwas hinziehen wird, kurz angegeben sein soll.

Durch den horizontal gelagerten geraden Nernststift mit vorgeschaltetem Eisenwiderstand wurde der zur gewöhnlichen Leuchttemperatur erforderliche Strom einer 220-Voltleitung geschickt, so daß der zuvor erwärmte Stift zu der üblichen Leuchttemperatur erhitzt wurde. Mit

1) So ist z. B. die Dämpfungskonstante ν' als unabhängig von der Dampfdichte eingeführt worden, ferner wurde auch für verschiedene in derselben Flamme leuchtende Salze immer der gleiche Wert von ν' benutzt.

1) P. Cermak, diese Zeitschr. **14**, 1178, 1913.

2) Inzwischen sind Messungen der Thermokraft des Nernstbrenners von J. Shearer, Phys. Rev. **34**, 238, 1912 veröffentlicht worden.

einem möglichst nahe an den Stift gebrachten Metallschirm wurde das Licht des Glühstiftes bis auf 2—3 mm an den beiden Enden abgeblendet. Das Licht ging dann durch eine grüne und blaue Glasscheibe, damit die Helligkeitsunterschiede, die bei kleineren Wellenlängen stärker von der Temperatur abhängen, deutlicher beobachtet werden konnten, und durch eine Mattscheibe. Zuletzt wurden die Strahlen durch ein flaches Biprisma so gebrochen, daß die Enden des Stifts direkt nebeneinander erschienen und somit leichter verglichen werden konnten. Bei Stromdurchgang entstand infolge des beträchtlichen Peltiereffekts eine Verdunkelung bzw. ein helleres Aufleuchten des einen Endes gegenüber dem anderen. Hierbei entsprach der Unterschied in der Helligkeit dem Lichtverlust durch 2 Objektträger, mithin etwa 12 Proz. Bei Kommutieren des Stromes kehrte sich der Effekt um. Die Richtung des Peltiereffekts entsprach auch dem Zeichen nach der von mir gemessenen Thermokraft von Nernstmasse gegen Platin.

Eingehende Messungen, die a. a. O. veröffentlicht werden sollen, an neuen noch ungebrannten und älteren gebrannten Nernststiften ergaben, daß die Thermokraft pro Grad von Nernststift gegen *Pt* an ungebrannten ziemlich konstant bleibt, bei gebrannten dagegen ansteigt. Die Stifte wurden teils in einer glasierten Porzellanröhre über dem Bunsenbrenner, teils im elektrischen Ofen erhitzt; die Thermokräfte wurden anfangs nach der Kompensationsmethode, später mit Elektrometer von J. Elster und H. Geitel[1]) gemessen.

Ungebrannter Stift (matte Oberfläche) im elektrischen Ofen:

$\frac{T_1+T_2}{2}$	T_1-T_2	$\frac{dE}{dT}$
485	60	— 400 Mikro-Volts
664	104	470
690	76	540
790	85	540
868	105	520
950	70	530
1061	66	530

Gebrannter Stift (längere Zeit in der Lampe verwandt, mit glänzender Oberfläche) im elektrischen Ofen:

546	37	— 530
756	27	580
885	38	730
988	35	780
1163	35	1020

Das Vorzeichen der Thermokraft ist das gleiche wie von *Fe* gegen *Cu*, also negativ (im Sinne der Bezeichnung der Phys. Techn. Reichsanstalt und von J. Koenigsberger und J. Weiss[1]). Wie bereits J. Shearer[2]) in seiner kurzen Mitteilung bemerkt, gelingt es bei der Heizung des Stiftes direkt über dem Bunsenbrenner kaum konstante Werte zu erhalten. In der Gasflamme zeigen sich vielmehr einige interessante Erscheinungen, die a. a. O. behandelt werden sollen. Zu bemerken ist noch, daß beim Nernststift ebensowenig wie bei den noch zu besprechenden Auerstiften, Magnesiastäbchen und Quarzröhrchen irgendwelche Nachwirkungserscheinungen der Thermokraft auftreten, welche auf Polarisation und damit auf elektrolytische Leitung hinweisen könnten, wie ich sie an Glas fand. Die Masse des Auerglühstrumpfes, die wir der Deutschen Gasglühlicht-Gesellschaft verdanken und die von der A. E. G., Abteilung Nernstlampen, in Stifte mit eingepreßten Platindrähten geformt wurde, gibt etwas größere Thermokräfte als der Nernststift und zeigt außerdem eine deutlichere Temperaturabhängigkeit derselben. Materialverschiedenheiten sind bemerkbar.

$\frac{T_1+T_2}{2}$	T_1-T_2	$\frac{dE}{dT}$
773	94	— 862 Mikro-Volts
910	57	1240
1010	60	1370
1090	160	1600
1105	65	1780
1143	115	2100
1142	33	2200

Wesentlich ist bei allen diesen Versuchen vollkommene Isolation, am besten Luft, was durch freies Hängen der Stifte im Ofen erreicht wird. Die Platin-Platinrhodiumdrähte müssen ihre Verbindungsstelle genau am Stifte haben.

Quarzglas zeigt über 800° eine Thermokraft desselben Zeichens, bei tieferen Temperaturen tritt eine Erscheinung auf, die a. a. O. ausführlicher besprochen wird.

$\frac{T_1+T_2}{2}$	T_1-T_2	C
827	100	— 542 Mikro-Volts
866	68	547
990	47	495

Beim Auer- und Nernststift wurde wiederholt das Fehlen jeglicher Polarisation bei ganz rascher Umschaltung festgestellt. Auch stellt sich bei allen obenerwähnten Substanzen mit der Tempe-

1) J. Elster und H. Geitel, diese Zeitschr. **10**, 664, 1909.

1) J. Koenigsberger und J. Weiss, Ann. d. Phys. **35**, 1, 1911.
2) J. Shearer, loc. cit.

raturdifferenz sofort die thermoelektrische Kraft ein, die von derselben Art ist, wie bei Metallen. Epidot, der eisenhaltig ist, zeigt eine entgegengesetzte Thermokraft etwa $+1000$ MV, entwässert etwa $+500$ MV.

Ganz anderer Natur sind die thermoelektrischen Erscheinungen an Glas. In dickwandige Kapillaren von Natronglas wurden an den Enden Pt—$PtRh$ Elemente eingeschmolzen. Das Glas samt Zuführungsdrähten wurde in einer mit ausgeglühter Asbestwolle gefüllten Kupferröhre über dem Bunsenbrenner erhitzt. Es wurde immer, was ausdrücklich bemerkt sei, bei Temperaturen gearbeitet, höher als diejenigen, bei denen die elektrolytische Leitung allein hervortritt und das auselektrolysierte Glas noch isoliert. Die Thermokräfte, durch Kompensation gemessen, waren im allgemeinen kleiner als die im Elektroskop beobachteten, wie folgende Tabellen zeigen:

Mit Kompensation.			Mit Elektroskop.		
$\frac{T_1+T_2}{2}$	T_1-T_2	$\frac{dE}{dT}$	$\frac{T_1+T_2}{2}$	T_1-T_2	$\frac{dE}{dT}$
509°	31	1740 MV	520°	18	2300 MV
541	23	2500	570	63	3900
585	42	1700	646	44	3300
600	25	1950	663	43	3300

Aus allen meinen Beobachtungen ergibt sich als Mittel der Kompensationsmessungen —1800 MV, der elektrostatischen —2900 MV.

Im weiteren Verfolg dieser Erscheinung ergab sich tatsächlich eine Polarisationskraft des Glases, die zwar auch bei elektrostatischer Potentialmessung nicht ganz ausblieb — wegen der Kompensationsmessung der Temperatur und anderen Gründen —, dagegen bei Stromschluß durch das Galvanometer sehr viel leichter zustande kommen konnte.

Die Messung dieser auf der Ionisation des Glases beruhenden elektromotorischen Gegenkraft erfolgte nach zwei verschiedenen Methoden:

I. Wurde der Bunsenbrenner unter dem Glasstück rasch von dem einen zum anderen Ende verschoben, so mußte sich das Temperaturgefälle innerhalb meßbarer Zeit (ca. 40 Sekunden) umkehren und mit ihm der Ausschlag im Elektroskop, wenn er der metallischen Thermokraft durch Null hindurch folgte. Das Elektroskop zeigte jedoch diesen regelmäßigen Gang nicht, wie er an den übrigen Materialien tatsächlich beobachtet wurde. Der Ausschlag eilte vielmehr der Temperaturdifferenz weit voraus, bei Temperaturgleichheit im Glas hatte man einen maximalen Ausschlag, entgegengesetzt der jeweils vernichteten Thermokraft. Erst allmählich gewann die neu sich bildende Thermokraft wieder die Oberhand und drängte die Polarisation zurück bzw. überwog sie. Dies konnte nach jeder Richtung beliebig oft wiederholt werden. Ähnlich verhält sich Disthen.

Zur Erklärung dieser Erscheinung kann man sich vielleicht vorstellen, daß die Thermoelektrizität des Glases ausschließlich durch Elektronen des Kieselsäuregerüstes hervorgerufen wird. Durch diese elektromotorische Kraft werden die Alkalionen[1]) des Glases verschoben, ihre Konzentration wird geändert und ruft damit eine Gegenspannung hervor. Diese Gegenspannung wird erst bei Verminderung der Temperaturdifferenz merkbar und kann dann auf das Elektroskop seine größte Wirkung ausüben, wenn im Stabe selbst keine Thermokraft mehr vorhanden ist.

II. Die Polarisation konnte bei diesen hohen Temperaturen in der gewöhnlichen Weise mit dem Elektroskop gemessen werden, indem Spannungen von 0,07 bis 72 Volt an die Enden des Glasstabes angelegt wurden, und zwar durch die sonst als Thermoelemente dienenden Pt-Drähte. Durch einen momentan wirkenden Umschalter konnte der Primärstrom ausgeschaltet und das Elektroskop an die Glasstabenden angelegt werden. Bei ca. 40 Volt erhält man eine Polarisation: 0,29 Volt, die von da ab konstant zu bleiben scheint. Nach allgemeiner Ansicht genügt das Vorhandensein einer Polarisationsspannung von 0,1 Volt zum Nachweis elektrolytischer Leitung.

Beim Nernststift und den Stiften aus der Auermasse bemühte ich mich vergebens, eine ähnliche Erscheinung zu finden. Daher kann man annehmen, daß die Elektrizitätsleitung im Nernststift und Auerstift im wesentlichen metallisch ist; die von M. Bose[2]) im Vakuum beobachteten Veränderungen können zum Teil entweder auf einer sekundären geringen Elektrolyse oder auf Sauerstoffabspaltung infolge der hohen Temperatur beruhen.

Die Versuche wurden auf Veranlassung von Herrn J. Koenigsberger unternommen; die genaueren Daten, auch die Widerstandswerte und Erörterungen über die theoretischen Beziehungen zwischen Thermokraft und Leitfähigkeit insbesondere auch das Auftreten eines Maximums der Thermokraft, sollen in einer Dissertation veröffentlicht werden.

1) Vgl. E. Warburg, Ann. d. Phys. **40**, 327, 1913, und Wied. Ann. **21**, 644, 1884.
2) M. Bose, Ann. d. Phys. **9**, 164, 1902.

Freiburg i. Br., Math.-phys. Institut der Universität, November 1913.

(Eingegangen 27. November 1913.)

Nachträgliche Antwort auf eine Frage von Herrn Reißner.

Von A. Einstein.

Unbegreiflicherweise habe ich eine Frage, die Herr Reißner[1]) in der Diskussion zu meinem Gravitationsvortrage an mich gerichtet hat, total mißverstanden und unrichtig beantwortet, trotzdem die Frage klar gestellt war. Letztere sei zunächst wiederholt[2]):

„Herr Einstein hat von den ablenkenden Einflüssen der Schwerefeldes auf die Schwingungsenergie des Lichtstrahls gesprochen. Ich möchte nun Herrn Einstein bitten, sich noch über ... die Einwirkung des Schwerefeldes auf seine eigene statische Feldenergie zu äußern.

In der nicht linearen Einsteinschen Potentialgleichung, der erweiterten Laplaceschen, kann ja, wie Herr Einstein gezeigt hat, das eine Glied als Gravitationswirkung der statischen Feldenergie gedeutet werden. Wie läßt es sich nun weiter plausibel machen, bzw. wie kommt es mathematisch heraus, daß die statische Energie des reinen Gravitationsfeldes, trotzdem sie Trägheit und Schwere besitzt, die weiteren Attribute der ponderablen Masse, ponderomotorische Kräfte aufzuweisen, nicht besitzt? Oder auch, wie kommt es heraus, daß das Feld ein statisches bleibt, trotzdem eine Feldenergie des leeren Raumes der Schwere unterliegt? Wie wäre die besondere Art von Energie zu kennzeichnen, die der ponderablen Masse im Gegensatz zu anderen Energieformen eigentümlich ist?"

Zunächst erinnere ich daran, daß unbedingt gefordert werden muß, daß Materie und Energie zusammen den Erhaltungssätzen des Impulses und der Energie genügen. Es kommt dies darauf hinaus, daß die Existenz einer Gleichung von der Form (9b) zu fordern ist, d. h. von der Form

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}) = 0. \qquad (9b)$$

Nimmt man nämlich an, daß ein System bezüglich Materie und Gravitationsfeld endlich ausgedehnt ist, so erhält man aus (9b) durch Integration über den ganzen von dem System eingenommenen (dreidimensionalen) Raum die vier Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \int (\mathfrak{T}_{\sigma 4} + \mathfrak{t}_{\sigma 4}) \, dV = 0,$$

d. h. Gleichungen von der gewohnten Form der Erhaltungssätze. Es dürfte für die Erhaltungssätze kaum eine andere vierdimensional symmetrische Ausdrucksform geben als (9b).

An Gleichung (9b) läßt sich aber schon das von Herrn Reißner geäußerte Bedenken anknüpfen. Nach (9b) haben die Impulsgleichungen des statischen Schwerefeldes bei Abwesenheit materieller Vorgänge die Gestalt

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_{\sigma 1}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{t}_{\sigma 2}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{t}_{\sigma 3}}{\partial z} = 0.$$

Dabei erscheint das Gleichgewicht im statischen Schwerefelde auf das Gleichgewicht ausschließlich von Flächenkräften zurückgeführt, während doch im Schwerefelde eine Art von Volumkräften existieren sollte, indem nach den Grundvoraussetzungen der Theorie zu erwarten wäre, daß das Schwerefeld auf seine eigenen „energetischen Komponenten" $\mathfrak{t}_{\sigma\nu}$ ebenso wirke wie auf die entsprechenden energetischen Komponenten $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ der Materie.

Es ist indessen zu bemerken, daß aus der Möglichkeit einer derartigen Darstellung nichts folgt über die physikalische Natur der ins Auge gefaßten Wirkungen. Die Möglichkeit einer solchen Darstellung sagt eben nichts anderes aus, als daß der Impulssatz gilt. Wenn Herr Reißner sagt, daß die Existenz einer Energiedichte eines statischen Gravitationsfeldes eine Impulsabgabe des Schwerefeldes an sich selbst zur Folge haben müsse, wenn der Grundgedanke der Theorie nicht preisgegeben werden solle, so stimme ich ihm bei. Aber diese Impulsabgabe muß durch die Wirkungen (Impulsabgabe) von Druckkräften kompensiert sein, da sonst der Impulssatz verletzt wäre. Im Impulssatz des Schwerefeldes sind Volumkräfte und Flächenkräfte nicht trennbar, und es verlangt der Impulssatz die Zurückführbarkeit aller Kräfte auf Flächenkräfte[1]).

Andererseits muß aber von der Theorie verlangt werden, daß die energetischen Komponenten des zu einem abgeschlossenen System gehörigen Schwerefeldes zu der schweren Masse des ganzen Systems genau so beitragen wie die energetischen Komponenten der das System konstituierenden Materie. Diese Bedingung erfüllt die Theorie tatsächlich, wie aus dem folgenden hervorgeht.

In einen vorher gravitationsfreien Raum $\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = 0\right)$ legen wir ein statisches materielles

1) Diese Zeitschr. **14**, 1265, 1913.

2) Ich unterdrücke hier die Fußbemerkung, weil durch das hier Wiederholte die aufgeworfene Frage genügend klar fixiert wird.

1) In der Elektrostatik darf z. B. aus der Darstellbarkeit der auf die Materie wirkenden Kräfte durch die Maxwellschen Spannungen nicht geschlossen werden, daß auf die Materie tatsächlich keine Volumkräfte wirken; es handelt sich vielmehr um eine bloße Art der Darstellung, welche die Gültigkeit des Reaktionsprinzips evident macht.

System Σ, dessen energetische Komponenten zum Teil zu dem Gravitationsfelde gehören, das die Teile von Σ erzeugen. Die Gleichungen des Gravitationsfeldes (7b) lauten, wenn

$$\sum_{\beta\mu} \sqrt{-g}\, \gamma_{\alpha\beta}\, g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} = G_{\alpha\sigma\nu}$$

gesetzt wird:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial G_{\alpha\sigma\nu}}{\partial x_\alpha} = \varkappa (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}).$$

Die Größen $G_{\alpha\sigma\nu}$ können hierbei in gewissem Sinne als die Komponenten der Feldstärke der Gravitation bezeichnet werden. Da alle zeitlichen Ableitungen in unserem Falle verschwinden sollen, folgt hieraus durch Integration über das Innere einer geschlossenen Fläche folgendes System von dem Gaußschen Satze entsprechenden Gleichungen

$$\int (G_{1\sigma\nu}\cos(nx) + G_{2\sigma\nu}\cos(ny) + G_{3\sigma\nu}\cos(nz))\, d\omega = \varkappa \int (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu})\, dV,$$

wobei n die Richtung der auf dem Flächenelement $d\omega$ nach außen gezogenen Normalen und dV das Raumelement bedeutet. Wählt man als Grenze des Integrationsraumes eine das System Σ nebst seinem Gravitationsfelde umschließende Fläche, so daß sie bis auf Vernachlässigbares die ganze Gravitationsenergie des Feldes einschließt, so sieht man, daß die Anzahl der eine unendlich ferne Fläche durchsetzenden „Kraftlinien der Gravitation" nur von dem Integral auf der rechten Seite der betreffenden Gleichung abhängt. In dem uns interessierenden Falle ist übrigens, wie sich aus den Impulssätzen dartun läßt, bei passender Wahl des Bezugssystems die rechte Seite nur im Falle $\sigma = \nu = 4$ von Null verschieden.

Aus dem Gesagten folgt, daß die Stärke des Gravitationsfeldes in großer Entfernung von Σ außer von der Entfernung nur von

$$\int (\mathfrak{T}_{44} + \mathfrak{t}_{44})\, dV,$$

d. h. nur von der Gesamtenergie von Σ (Energie der Materie + Gravitationsenergie) abhängt[1]). Entsprechendes gilt auch von der ponderomotorischen Wirkung, welche das durch Σ erzeugte Gravitationsfeld auf einen in genügender Entfernung von Σ befindlichen Massenpunkt P ausübt.

Ein solcher materieller Punkt P wirkt aber auf Σ zurück, und zwar wegen (9b) derart, daß die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung gewahrt bleibt. Die von P auf Σ durch Gravitation ausgeübte gesamte Kraftwirkung hängt also außer von der relativen Lage von Σ und P und von der Masse von P nur von der Gesamtenergie von Σ ab. Damit ist der verlangte Nachweis geführt.

In den Grundlagen der Theorie ist übrigens nicht nur die Forderung enthalten, daß die schwere Masse eines abgeschlossenen statischen Systems nur durch die Gesamtenergie bestimmt sei, derart, daß das Gravitationsfeld in analoger Weise zur Gesamtmasse beiträgt wie die Materie. Es muß vielmehr Entsprechendes auch für die träge Masse des Systems gelten. Daß dies merklich der Fall ist, ergibt sich in folgender Weise.

Zunächst bemerken wir, daß $\frac{1}{\sqrt{-g}}(\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu})$ bezüglich linearer Transformationen ein gemischter Tensor ist (bezüglich des Index σ kovariant, bezüglich des Index ν kontravariant).

Es sei nun $\mathfrak{A}_{\sigma\nu}$ ein beliebiger gemischter Tensor solcher Art. Dann ist $\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu}$ ein kovarianter Vektor, oder, was dasselbe ist

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu} \sqrt{-g}}{\partial x_\nu} - \sum \mathfrak{A}_{\sigma\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\nu}.$$

Nun ändert sich aber $\sqrt{-g}$ bei Vornahme einer linearen Transformation nur um einen konstanten Faktor. Daher ist $\frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\nu}$ ein kovarianter Vierervektor, und ebenso das zweite Glied des obigen Ausdruckes. Daraus folgt, daß auch die vier Größen

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu} \sqrt{-g}}{\partial x_\nu}$$

einen kovarianten Vierervektor bilden.

Andererseits ist das Produkt des vierdimensionalen Raumelementes $d\tau$ mit $\sqrt{-g}$ ein Skalar. Hieraus folgt, daß auch

$$d\tau \sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu} \sqrt{-g}}{\partial x_\nu}$$

ebenfalls ein kovarianter Vektor ist. Gleiches gilt auch von dem Integral dieser Größe über einen beliebigen vierdimensionalen Raumteil.

Wir setzen nun über die $\mathfrak{A}_{\sigma\nu}$ folgendes voraus:

1. Alle $\mathfrak{A}_{\sigma\nu}$ mögen für (positiv und negativ) unendlich große x_1, x_2, x_3 verschwinden.

1) Dabei ist allerdings Radialsymmetrie des Feldes im Unendlichen stillschweigend vorausgesetzt. Diese läßt sich erzielen, wenn man das Bezugssystem so wählt, daß im Unendlichen das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gewahrt ist (berechtigtes Bezugssystem im Sinne der ursprünglichen Relativitätstheorie).

2. Die Summe $\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu}$ soll nur in einem endlichen Bereich von x_4 von Null verschieden sein, für kleinere und größere Werte von x_4 aber verschwinden.

Unter diesen Voraussetzungen hat das Integral

$$\int d\tau \sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} \sqrt{-g}$$

erstreckt über alle Werte von x_1, x_2, x_3 und zwischen zwei Werten t_1 und t_2 von x_4, welche das in (2) angegebene Wertintervall einschließen, den Wert

$$\int\int\int \mathfrak{A}_{\sigma 4} \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \Big|_{t_1}^{t_2} = I_\sigma .$$

Nach dem oben Gesagten ist nun dies Integral, über einen bestimmten vierdimensionalen Raumteil erstreckt, ein kovarianter Vierervektor. Es behält diese Eigenschaft, wenn man das Integrationsgebiet um Gebiete erweitert, in denen der Integrand verschwindet. Daraus geht hervor, daß auch das zuletzt betrachtete Integral ein Vierervektor ist. Das gleiche wird für das dreidimensionale Integral gelten,

$$I_\sigma = \int \mathfrak{A}_{\sigma 4} \sqrt{-g}\, dV ,$$

solange man sich für alle in Betracht kommenden Bezugssysteme bei der ins Auge gefaßten dreidimensionalen Integration innerhalb eines vierdimensionalen Bereiches befindet, in welchem allenthalben

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} = 0$$

ist. Hieraus ziehen wir, indem wir für $\mathfrak{A}_{\sigma\nu}$ den Tensor $\frac{1}{\sqrt{-g}} (\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu})$ setzen, den Schluß, daß die vier dreidimensionalen Integrale

$$I_\sigma = \int (\mathfrak{T}_{\sigma 4} + \mathfrak{t}_{\sigma 4})\, dV ,$$

erstreckt über ein abgeschlossenes (vollständiges) System Σ, einen kovarianten Vierervektor bilden.

Es ist klar, daß die drei ersten Integrale I_1, I_2, I_3 die Impulskomponenten (mit negativem Vorzeichen), das letzte (I_4) die Gesamtenergie von Σ darstellen. Daraus geht hervor, daß die Trägheitseigenschaften eines abgeschlossenen Systems (dieses als Ganzes betrachtet) dieselben sind wie diejenigen eines materiellen Punktes von beliebig kleiner Masse. Wir haben nur noch zu untersuchen, wie die „Masse" des Systems mit den angegebenen Integralen zusammenhängt. Bezeichnen wir mit I_σ^* den kovarianten Impuls-Energievektor eines materiellen Punktes von der Masse m, so ist[1])

$$I_\sigma^* = m \sum_\nu g_{\sigma\nu} \frac{dx_\nu}{ds} ,$$

wobei

$$ds^2 = \Sigma g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$$

gesetzt ist. Wir haben vorausgesetzt, daß das Schwerefeld im Unendlichen verschwinde, d. h. daß die $g_{\mu\nu}$ im Unendlichen konstant seien. Wir können also das Bezugssystem so wählen, daß die $g_{\mu\nu}$ überall im Unendlichen die Werte

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{matrix}$$

annehmen, wobei c eine Konstante ist. Wir wählen das Bezugssystem ferner derart, daß das System Σ als Ganzes, sowie der mit ihm äquivalente materielle Punkt, relativ zum Bezugssystem in Ruhe sei, d. h. daß I_1, I_2, I_3 sowie I_1^*, I_2^*, I_3^* verschwinden. Dann ergibt sich

$$I_4 = \int (\mathfrak{T}_{44} + \mathfrak{t}_{44})\, dV ,$$
$$I_4^* = mc .$$

Diese beiden Größen sind einander gleich zu setzen, wobei I_4 die Bedeutung der „Ruheenergie" U_0 hat. Es ist also

$$m = \frac{U_0}{c^2} .$$

Die Trägheit eines abgeschlossenen Systems Σ ist also durch seine Ruheenergie vollkommen bestimmt.

Im vorstehenden ist gezeigt, daß die energetischen Komponenten des Gravitationsfeldes zur Schwere und Trägheit eines Systems genau so beitragen wie die energetischen Komponenten materieller Gebilde.

---

1) Vgl. die Broschüre „Entwurf einer Verallgemeinerung der Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation". B. G. Teubner, 1913, § 2.

(Eingegangen 11. Dezember 1913.)

BESPRECHUNGEN.

P. Zeeman, Researches in Magneto-Optics. With Special Reference to the Magnetic Resolutions of Spectrum Lines. gr. 8. XIV u. 219 S. mit 74 Figuren. London, Macmillan and Co. Ltd. 1913. 6.— s. net.

In einer Reihe von Publikationen, bezeichnet Science Monographs, gibt der oben genannte Verlag einer Anzahl Autoren Gelegenheit, sich in zusammenhängender Darstellung über Gebiete zu äußern, in denen sie längere Zeit und besonders erfolgreich gearbeitet haben. In dem vorliegenden sechsten Stück dieser Reihe faßt Professor Zeeman das Wesentlichste aus seinen über etwa 20 Jahre erstreckten Untersuchungen über magnetooptische Probleme zusammen, wobei ganz von selbst das von ihm entdeckte wundervolle Phänomen, das für alle Zeit seinen Namen trägt, die magnetische Beeinflussung von Spektrallinien, in den Mittelpunkt der Darstellung rückt.

Einen erfolgreichen Entdecker in umfassender Weise über seine Arbeiten zu hören, bietet jederzeit einen eigenartigen Reiz. In der freieren Form wird Raum für so manche Bemerkung, die uns Blicke in den Entwicklungsgang der Untersuchungen, die leitenden Gesichtspunkte, die Vorstufen des Erfolges gewährt, während die knappe Art der wissenschaftlichen Spezialabhandlung dergleichen meist zurückzudrängen nötigt. Das Zeemansche Buch bringt mancherlei Ergänzungen der früheren allbekannten Darstellungen in dieser Richtung, und so wirkt in ihm Persönlichkeit und Gegenstand in anregender Weise zusammen.

Der „Zeeman-Effekt" bezeichnet anerkanntermaßen einen Markstein auch in der Entwicklung der allgemeinen Optik. Durch ihn hat sich die zuvor nur vermutete Rolle der Elektronen bei den Vorgängen der Emission, Absorption, Dispersion so weit feststellen und entwickeln lassen, als gegenwärtig nur immer denkbar erscheint, und die Aussichten, die seine weitere Erforschung für die Klärung unserer Anschauungen über die innersten Vorgänge der ponderablen Atome und Moleküle bietet, sind die hoffnungsvollsten. Und in der schlichten und bestimmten, aber vom inneren Feuer der wissenschaftlichen Begeisterung durchglühten Darstellung gestaltet sich von selbst das Bild eines Forschers, der in seinem Gegenstand aufgeht, ihm in rastloser Arbeit immer neue Seiten abgewinnt, der in Entdeckerfreude niemals das Werkzeug gewissenhaftester Prüfung aus der Hand legt, und bei einem durchaus gesunden und kräftigen Selbstgefühl jedes Vorgängers und Mitarbeiters Leistungen weitherzig anerkennt. So wird jeder aufmerksame Leser aus dem Buch Anregung und Genuß schöpfen.

Was die Auswahl und Anordnung des Stoffes angeht, so ist sie die folgende:

Kap. 1. Moderne Spektroskope und ihre auflösende Kraft. Kap. 2 und 3. Magnetische Zerlegung von Emissions- und Absorptionslinien. Kap. 4. Kompliziertere Zerlegungen und ihre Beziehungen zu den Seriengesetzen. Kap. 5. Begleiterscheinungen der Zerlegungen: zirkulare und lineare magnetische Doppelbrechung. Kap. 6. Die Intensitätsverhältnisse der Schwingungskomponenten. Kap. 7. Dissymmetrische Zerlegungen und Verschiebungen von Spektrallinien durch das Magnetfeld. Kap. 8. Magnetische Erscheinungen auf der Sonne. Kap. 9. Absorptions- und Polarisationseffekte in gegen das Magnetfeld geneigten Richtungen. Kap. 10. Beziehungen zwischen der magnetischen Zerlegung der Spektrallinien und der Konstitution der Materie.

Die wertvollen Untersuchungen des Verfassers zum magnetooptischen Kerr-Effekt haben sich hiernach leider dem Gesamtplan des Buches nicht einfügen lassen und sind daher nicht aufgenommen worden. Im übrigen gibt das Werk aber einen schönen und vollständigen Überblick über die Zeemanschen epochemachenden Arbeiten. Voigt.

L. Prandtl, Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung (Abdruck aus dem Handwörterbuch der Naturwissenschaften, Band IV.) Lex. 8. VI u. 57 S. mit 124 Abbildungen. Jena, Gustav Fischer. 1913. M. 1.60

Es ist noch gar nicht so lange her, da konnte man es in verschiedenen flugtechnischen Werken lesen, nur die Praxis der Flugtechnik, bestenfalls gute Laboratoriumsversuche, könnten für die Fortschritte auf diesen Gebieten etwas erreichen. Die Theorie sei ganz unzulänglich, und was als hydrodynamische oder aerodynamische Theorie gelte, habe mit den Vorgängen in wirklicher Flüssigkeit oder in der Luft nicht das geringste zu tun. — Dieser Standpunkt hatte seine Berechtigung, denn in der Tat, die Voraussetzungen, von denen man früher in der Hydromechanik ausging, und auf die man ein kunstvolles mathematisches Gebäude errichtete, waren eben dieser mathematischen Behandlungsmöglichkeit zuliebe so vereinfacht, daß einige der bezeichnendsten Eigenschaften einer natürlichen Flüssigkeit hinwegfallen mußten. — Das ist nun glücklicherweise anders geworden unter dem befruchtenden Einflusse der Praxis des Flugwesens. Hier brauchte und fand man wirkliche Resultate, und die Theorie kam diesem Bedürfnis allmählich nach. Freilich mit anderen, neuen Methoden, die der Wirklichkeit mehr abgelauscht waren als die bisherigen.

Ein ganz besonderes Verdienst um die Ausbildung dieser neuen Hydrodynamik hat sich Prof. Prandtl erworben, insbesondere durch seine Theorie der Wirbelablösung in den Grenzschichten bei kleiner Reibung. Es ist hauptsächlich dadurch ermöglicht worden, die alten theoretischen Methoden den wirklichen Verhältnissen anzupassen. In der vorliegenden Schrift, die als Sonderabdruck eines Artikels aus dem Handwörterbuch der Naturwissenschaften erschienen ist, gibt nun Prof. P. eine Zusammenfassung der ganzen Hydrodynamik vom modernen Standpunkt aus. Bei aller Kürze reicht die Darstellung doch erheblich über den Rahmen einer Enzyklopädie hinaus. Sehr dankenswert sind besonders die beigefügten Beispiele, welche deutlich den heute erreichten engen Zusammenschluß von Theorie und Praxis bekunden. Der Inhalt gliedert sich im wesentlichen zunächst in die Kinematik und Dynamik der Flüssigkeit (wobei besonders die knappe und doch klare Fassung einzelner wichtiger Begriffe, wie beispielsweise „Zirkulation" und „Wirbel", hervorgehoben sei). Weiter folgt die ziemlich ausführliche Behandlung einiger bedeutsamer technischer Probleme, die vielfach auch durch die Wiedergabe der bekannten Laboratoriumsversuche des Verfassers und von anderen Forschern illustriert werden. Von allgemeinerem Interesse ist hier das Kapitel über Flüssigkeitswiderstand und Auftrieb, in dem die neueren Arbeiten von Kutta, v. Kármán und des Verfassers kurz, aber das Wesentliche herausheben, besprochen werden. Ein Anhang gibt eine

Übersicht über die wichtigsten hydro- und aerodynamischen Meßinstrumente.

Der zweite kürzere Teil des Buches beschäftigt sich mit den Gasbewegungen (wenn die Kompressibilität nicht vernachlässigt werden darf). Hier interessieren besonders die Strömungen in Düsen und die mehrdimensionalen Probleme (nach des Verfassers Arbeiten) sowie die Erscheinungen bei fliegenden Geschossen (Mach und andere). Erwähnt sei noch die dankenswerte Literaturangabe am Schlusse eines jeden Abschnittes.

Für einen jeden, der sich mit den modernen Fragen der Hydro- und Aerodynamik beschäftigt, wird die Schrift ein wertvolles Hilfsmittel zur raschen Orientierung sein. A. Pröll.

A. Guillet, Propriétés cinématiques fondamentales des vibrations. Conférences faites en 1911 aux candidats au certificat de physique générale. Notes par M. M. Aubert. gr. 8. 405 S. mit 103 Figuren. Paris, Librairie Gauthier-Villars. 1913. Fr. 16.—

Der erste Teil des Buches enthält eine ausführliche Kinematik der schwingenden Bewegungen. Ausgehend von der geradlinigen sinusförmigen Schwingung werden die gedämpfte Schwingung und die Zusammensetzung von Schwingungen in gleicher und zueinander senkrechter Richtung besprochen. Man vermißt hier vielleicht einen Hinweis auf die nicht sinusförmige Bewegung und die Fouriersche Reihe. Es folgen die fortschreitende, transversale Schwingung und in einem längeren Abschnitt die Interferenzerscheinungen bei Strahlen mit verschiedenem Gangunterschied. Der zweite Teil des Buches handelt von der Wellenbewegung, besonders von den elastischen (Schall-)Wellen, wobei auch auf die Elastizitätskoeffizienten näher eingegangen wird.

Die Darstellung ist rein deduktiv; den Ausgangspunkt bildet meist eine mathematische Formel oder ein einfaches kinematisches Modell. Es folgen dann über Anmerkungen, Beispiele aus der Physik, oder kleine Aufgaben, so daß auch der Anschaulichkeit genügend Rechnung getragen wird.

Da es bisher fast gar keine zusammenfassende Werke über das wichtige Spezialgebiet der Schwingungen gibt, wird das Buch vielen willkommen sein. H. Barkhausen.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule München Dr. Kurt Braß für chemische Technologie.

Ernannt: Der Privatdozent Professor Dr. Franz Feist an der Universität Kiel zum a. o. Professor für Chemie an derselben Hochschule, der Privatdozent Professor Dr. August Becker an der Universität Heidelberg zum etatsmäßigen a. o. Professor der theoretischen Physik ebenda, der Lektor an der Universität Münster Professor Dr. Joseph Plaßmann zum ord. Honorarprofessor für Astronomie ebenda, der Privatdozent der angewandten Chemie an der Universität Halle Professor Dr. Ernst Erdmann zum ord. Honorarprofessor daselbst, der a. o. Professor und erster Assistent am chemisch-technischen und elektro-chemischen Institut der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Bernhard Neumann zum ord. Professor der anorganisch-chemischen Technologie an der Technischen Hochschule Breslau, der Privatdozent für Geschichte der chemischen Theorien an der Böhmischen Universität Prag Dr. Jan Stanislav Sterba-Böhm zum a. o. Professor an derselben Hochschule, der a. o. Professor an der Universität Straßburg Kaiserlicher Geh. Regierungsrat Dr. Hugo Hergesell zum ord. Professor der Meteorologie an der Universität Berlin, der Privatdozent für Meteorologie und Klimatologie an der Böhmischen Universität Prag Dr. Stanislav Hanzlik zum a. o. Professor ebendaselbst, der Privatdozent für Keramik an der Böhmischen Technischen Hochschule Prag Dr. Ottokar Kallauner zum a. o. Professor für chemische Technologie an der gleichen Hochschule.

Neues Ordinariat: Zur Entlastung des ord. Professors Geheimrat Dr. Max Planck wird an der Universität Berlin ein zweiter Lehrstuhl für theoretische Physik errichtet, für den der a. o. Professor an der Universität Zürich Dr. Max v. Laue ausersehen ist.

Verliehen: Dem Hauptobservator am Astrophysikalischen Observatorium bei Potsdam Professor Dr. Paul Kempf und dem ord. Professor der Mathematik an der Universität Halle Dr. August Gutzmer der Titel Geh. Regierungsrat, dem Chemiker Dr. phil. Nikodem Caro in Berlin der Titel Professor.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Jena Geheimer Rat Dr. Johannes Thomae, der ord. Professor der Physik und Maschinenkunde an der landwirtschaftlichen Akademie Bonn Geh. Reg.-Rat Dr. Eberhard Gieseler.

Gestorben: Der a. o. Professor der Astrophysik an der Universität Berlin und Hauptobservator am Astronomisch-Physikalischen Observatorium bei Potsdam Dr. Julius Scheiner, der Privatdozent für Chemie an der Universität Würzburg Dr. Kurt Langheld, der ord. Professor der mathematischen Physik an der böhmischen Universität Prag Hofrat Dr. Franz Koláček, der frühere Direktor des Kais.-russ. meteorologischen und magnetischen Observatoriums in Peking Hofrat Dr. Hermann Fritsche in Riga.

Angebote.

Jüngerer Physiker

für wissenschaftlich-technische Arbeiten von einer ersten Optischen Anstalt zum baldigen Antritt **gesucht.** Promotion und Staatsexamen nicht unbedingt erforderlich. Offerten unter Chiffre **X. 300** an die Expedition dieses Blattes erbeten.

Für die Bearbeitung der wissenschaftlichen Literatur auf dem Gebiete der Flugtechnik wird ein

Mathematiker oder Physiker,

der für dieses Gebiet Interesse hat, gesucht. Bewerbung mit Lebenslauf, Gehaltsansprüchen und Angabe des frühesten Eintritts erbeten an die **Direktion der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Adlershof.**

Für die Redaktion verantwortlich Dr. Hans Busch in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.